



**HAL**  
open science

## Préconception d'arcs à relâchement d'effort

Rodolphe Le Riche, Alexandre Boyer, Joël Monnatte, Jérôme Molimard,  
Gustavo Silva

► **To cite this version:**

Rodolphe Le Riche, Alexandre Boyer, Joël Monnatte, Jérôme Molimard, Gustavo Silva. Préconception d'arcs à relâchement d'effort. [Rapport de recherche] Mines Saint-Etienne. 2008. emse-00687638

**HAL Id: emse-00687638**

**<https://hal-emse.ccsd.cnrs.fr/emse-00687638>**

Submitted on 18 Aug 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pré-conception d'arcs à relâchement d'effort  
Rapport d'étude ARMINES-Wildsteer, réalisé à l'Ecole Nationale  
Supérieure des Mines de Saint-Etienne

Rodolphe Le Riche  
CNRS UMR 5146 et ENSM-SE  
leriche@emse.fr

Albert Boyer  
ENSM-SE  
aboyer@emse.fr

Joël Monnatte  
ENSM-SE  
monnatte@emse.fr

Jérôme Molimard  
ENSM-SE  
molimard@emse.fr

Gustavo Silva  
ENSM-SE  
silva@emse.fr

28 mai 2008

### Résumé

L'arc, objet millénaire, reçoit aujourd'hui encore de nombreuses améliorations. La première étape dans la conception d'un arc performant est l'obtention d'une réponse force - allonge présentant un maximum d'effort avant le maximum d'allonge. Ce document présente une pré-conception d'arcs à relâchement d'effort. Deux solutions sont décrites.

La première, appelée "arc à poulies internes", est une extension des arcs à poulies actuels dans laquelle les poulies sont dans la poignée (par opposition à en bout de branche) et il n'y a plus qu'une corde de tir. La réponse statique des arcs à poulies internes est modélisée et son analyse nous renseigne sur l'effet des différents paramètres. Deux solutions, dont les courbes de réponses statiques force-allonge sont comparables aux meilleurs arcs à poulies actuels sont décrites. Un prototype est réalisé.

La seconde solution, appelée "arc à appuis internes" n'utilise pas le principe des poulies, mais les non linéarités géométriques et le contact. Cette seconde solution, plus exploratoire, est présentée et les premières analyses la concernant sont résumées.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>L'arc à poulies internes</b>	<b>4</b>
2.1	Présentation du concept . . . . .	4
2.2	Modèle mathématique de l'arc à poulies internes . . . . .	5
2.2.1	Equations de l'arc . . . . .	6
2.2.2	Résolution des équations . . . . .	9
2.3	Etude paramétrique de l'arc à poulies internes . . . . .	10
2.3.1	Variation de $k$ . . . . .	10
2.3.2	Variation de $C$ . . . . .	11
2.3.3	Variation de $\theta_0$ . . . . .	11
2.3.4	Variation de $L_c(\theta_0)$ . . . . .	13
2.3.5	Variation de $E$ . . . . .	13
2.3.6	Variation de $e$ . . . . .	13
2.3.7	Variation de $\alpha_0$ . . . . .	15
2.3.8	Réduction de l'encombrement, variation de $R$ . . . . .	15
2.3.9	Réduction de l'encombrement, variation de $r$ . . . . .	17
2.3.10	Etude d'un arc à branche courte . . . . .	20
2.4	Dimensionnement . . . . .	20
2.5	Etude expérimentale . . . . .	22
<b>3</b>	<b>L'arc à appuis internes</b>	<b>26</b>
3.1	Présentation du concept . . . . .	26
3.2	Modélisation de l'arc à appuis internes . . . . .	28
3.2.1	Modèle analytique . . . . .	28
3.2.2	Modèle par éléments finis . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Conclusions et continuations</b>	<b>30</b>
<b>A</b>	<b>Fichier input Abaqus de l'arc à appuis internes</b>	<b>34</b>
<b>B</b>	<b>Arc à poulies internes : projet d'A. Yaya, N. Marouf et T.-H. Lee</b>	<b>38</b>
<b>C</b>	<b>Arc à poulies internes : projet de Y. Giacinti</b>	<b>39</b>
<b>D</b>	<b>Arc à appuis internes : projet d'O. Dubois et V. Lavillette</b>	<b>40</b>
<b>E</b>	<b>Arc à appuis internes : projet de S. Kroneisen et D. Lalandre</b>	<b>41</b>

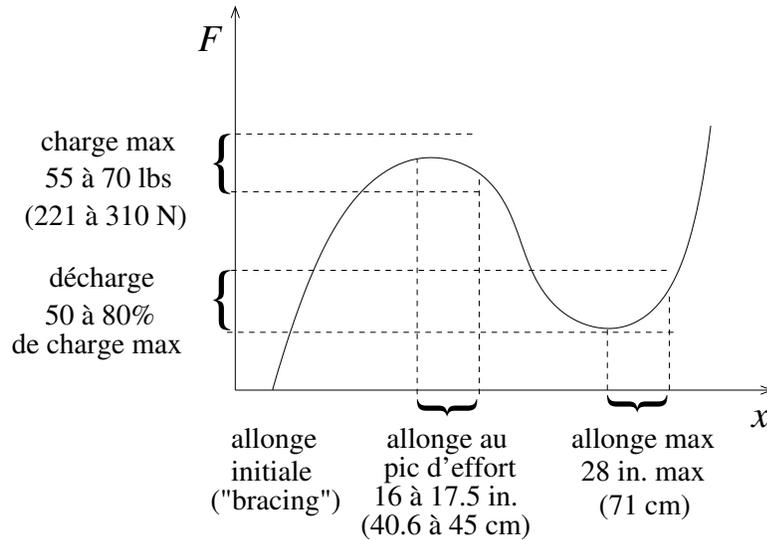


FIG. 1 – Réponse statique type d’un arc à poulie (objectif de la pré-conception), d’après [9, 10].

## 1 Introduction

L’arc est un objet millénaire qui n’a pourtant jamais cessé d’évoluer. Des progrès constants sont réalisés dans les matériaux et dans l’architecture des arcs. Les matériaux composites bois sont apparus dans les long bows utilisés en Angleterre dès la guerre de cent ans. Depuis trente ans, les composites plastiques se sont généralisés. Les architectures des arcs les plus performants ont été profondément changées par l’apparition des poulies (brevet de Holless Wilbur Allen en 1967). Cependant, cette “mécanisation” des arcs à haute performance leur a fait perdre une pureté de ligne à laquelle de nombreux archers sont très sensibles.

Ce rapport correspond à une étude réalisée sous l’impulsion de la société Wildsteer. L’objectif du travail est de trouver de nouveaux concepts pour réaliser des arcs performants comme les arcs à poulies mais en conservant, autant que possible, une ligne pure. Notre étude est donc essentiellement une proposition d’idées, une pré-conception, qui, en de nombreux points (que nous récapitulerons dans la partie Perspectives 4) mérite d’être approfondie.

Le point de départ de notre pré-conception est la réponse statique des arcs à poulies performants. Elle est illustrée en FIG. 1. Nous proposons ici des concepts d’arcs autres que les arcs à poulies (en bouts de branches) permettant de reproduire une telle réponse statique. Deux solutions sont décrites. Un arc “à poulies internes” d’une part (Section 2), et un arc “à appuis internes” d’autre part (Section 3). Dans les deux cas, le mot “interne” signifie dans la poignée, ce qui peut permettre de laisser les branches libres de tout mécanisme. Les deux solutions ont aussi en commun de n’avoir qu’une corde liant les extrémités des branches de l’arc (contrairement aux arcs à poulies qui en ont trois). Par contre, l’arc à poulie interne est une solution mieux maîtrisée et comprise que l’arc à appuis qui reste une voie exploratoire.

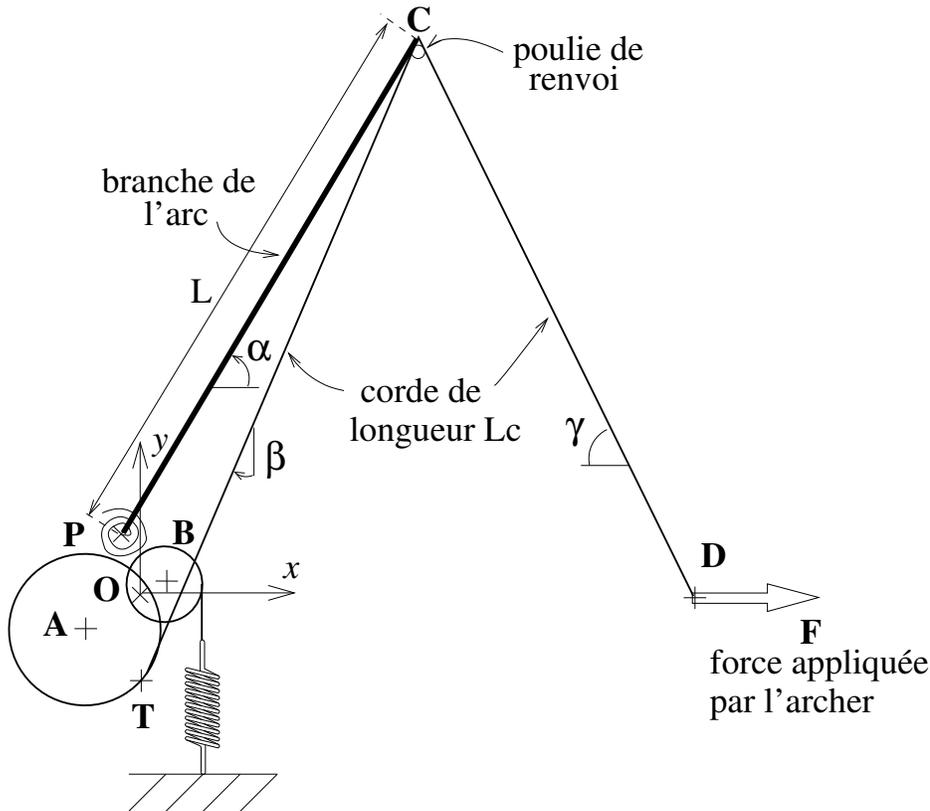


FIG. 2 – Vue schématique d’ensemble de l’arc à poulies internes.  $(O, x, y)$  est le repère dans lequel sont effectués les calculs.

## 2 L’arc à poulies internes

### 2.1 Présentation du concept

**Description** Une illustration d’une moitié de l’arc à poulies internes est donnée en FIG. 2. Le détail du mécanisme de poulies dans la poignée est en FIG. 3. La poulie de centre A (dite poulie de tir car elle porte la corde de tir) tourne autour du point O. C’est aussi le cas de la poulie de centre B (dite poulie de rappel car elle est attachée à un ressort de rappel de raideur  $k$ ). Les deux poulies sont solidaires l’une de l’autre, i.e., elle constituent un unique solide. La corde de tir, qui est enroulée autour de la poulie de tir, circule le long de la branche et est renvoyée au point de contact avec la flèche D par une simple poulie en C au bout de la branche. La poulie en C peut avoir un très petit rayon.

L’ensemble des poulies de tir et de rappel crée une compétition de moments des forces de tir et de rappel,  $F_T$  et  $F_R$ , respectivement, autour du point O. Au départ, le système est initialisé de manière à ce que le bras de levier de la force de rappel  $F_R$  soit plus grand que celui de la force de tir  $F_T$  (aux alentours de  $\theta = 0^\circ$ ). Puis, lorsque la corde de tir se déroule, les poulies tournent de  $\theta$  et les bras de levier s’inversent progressivement : le phénomène de décharge est créé par un accroissement du bras de levier de  $F_T$  et une diminution de celui de  $F_R$ . Ce mécanisme est, dans son principe, le même que celui des arcs à poulies actuels. Par contre, le cordage, la géométrie des poulies et le ressort de rappel constituent des différences avec les systèmes actuels.



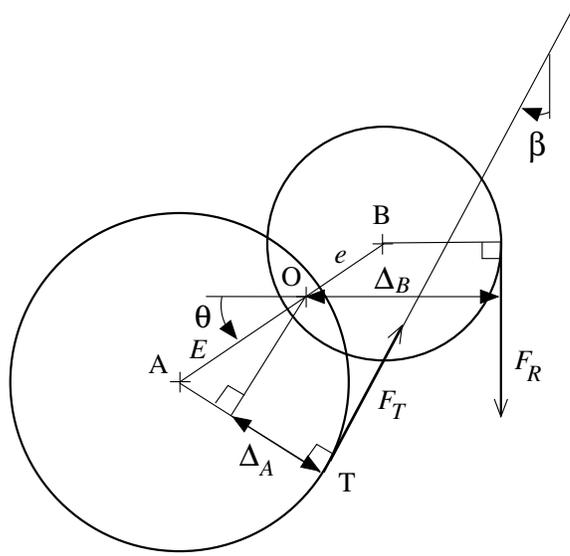


FIG. 4 – Détail des poulies internes et symboles utilisés dans le calcul des moments. De plus,  $R$  et  $r$  sont les rayons de la poulie de tir et de rappel, respectivement.

### 2.2.1 Equations de l'arc

Nous présentons maintenant les principales étapes de l'obtention du modèle statique de l'arc à poulies internes. Ces étapes sont :

- L'équilibre des efforts extérieurs à l'arc. Dans le cas de l'arc, cette relation est triviale puisqu'elle dit que la force  $F$  exercée par la main de l'archer sur la poignée est équilibrée par la force exercée par son autre main sur la corde.
- L'équilibre des efforts entre chaque sous-partie de l'arc. Dans notre cas, il s'agira de l'équilibre des moments en  $O$  et des équilibres de forces en  $C$  et  $D$ .
- L'arc est un système hyper-statique i.e. avec des sous-parties redondantes ; la branche de l'arc et une partie de la corde de tir lient  $O$  à  $C$ . Pour les systèmes hyper-statiques, les équilibres de forces ne suffisent pas à trouver les répartitions d'efforts et déplacement. Il faut aussi considérer la compatibilité entre les déformations des différentes parties du système (en l'occurrence la corde et la branche de l'arc) pour modéliser le système.

Dans notre présentation, nous ferons ressortir les hypothèses simplificatrices du modèle (outre le fait qu'il soit statique) et certaines définitions.

**Equilibre des moments en  $O$**  Deux forces produisent des moments en  $O$ ,  $F_T$  la tension de la corde et  $F_R$  la force de rappel du ressort.

**Hypothèse 1** *Le ressort de rappel reste vertical quelle que soit la position des poulies.*

Cette hypothèse, dont le but ici est de simplifier les calculs, pourrait aisément être éliminée en introduisant un angle entre le ressort et la verticale.

Les bras de levier des forces, notés  $\Delta_A$  et  $\Delta_B$ , ont pour expressions (cf. FIG. 4)

$$\Delta_A = R - E \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \theta\right) = R - E \cos(\beta + \theta), \quad (1)$$

$$\Delta_B = r + e \cos(\theta). \quad (2)$$

La force exercée par le ressort est

$$F_R = k \times \text{élongation} = k(r(\theta - \theta_0) + e \sin(\theta) - e \sin(\theta_0)) . \quad (3)$$

Notons bien au passage que la relation ci-dessus donne la signification de l'angle  $\theta_0$ , un des paramètres du montage de l'arc :

**Définition 1 (angle  $\theta_0$ )**  $\theta_0$  est la position des poulies telle que le ressort de rappel n'est pas allongé (ou n'exerce pas de force).

L'équilibre des moments s'écrit ensuite

$$F_T \Delta_A = F_R \Delta_B$$

soit en utilisant (1), (2) et (3),

$$F_T = \frac{k(r(\theta - \theta_0) + e \sin(\theta) - e \sin(\theta_0))(r + e \cos(\theta))}{R - E \cos(\beta + \theta)} \quad (4)$$

Cette équation montre que  $k$  permet, dans l'arc à poulies internes, de régler la force de tension de la corde et le niveau général d'efforts de manière relativement indépendante de la forme de la courbe. Les autres paramètres, en particulier la raideur de branche  $C$ , interviennent indirectement à travers les angles de déformation de l'arc.

### Equilibre des forces en C et D

**Hypothèse 2** La branche de l'arc est modélisée par un segment rigide  $PC$  en rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $P$ . La liaison entre  $P$  et la branche est une rotation élastique de raideur  $C$ .

Il s'agit d'une approximation grossière du comportement d'une branche d'arc. Néanmoins, la cinématique de l'extrémité de la branche (en grands déplacements) n'est pas trop mauvaise, en particulier par comparaison avec l'autre modèle simple que nous aurions pu utiliser, celui de la poutre encastree. La cinématique des poutres encastrees utilisées en résistance des matériaux est liée aux petits déplacements et seules les déplacements perpendiculaires à la poutre sont décrits. En d'autres termes, le point  $C$  ne se déplacerait que perpendiculairement à la branche dans sa position initiale. Une cinématique de rotation nous paraît moins fautive.

Soit  $F_B$  la force exercée par la branche en  $C$  perpendiculairement à  $PC$ . Elle est liée à la rotation de la branche par

$$F_B = \frac{C}{L}(\alpha - \alpha_0) . \quad (5)$$

**Définition 2 (angle  $\alpha_0$ )** L'angle  $\alpha_0$  est l'angle de la branche de l'arc à vide ou l'angle pour lequel la branche n'exerce pas de force.

La somme des efforts normaux à  $PC$  en  $C$  doit s'annuler ce qui s'écrit (cf. FIG. 5)

$$F_B = F_T \cos(\alpha + \beta) + F_T \cos(\alpha - \pi/2 + \gamma) = F_T \cos(\alpha + \beta) + F_T \sin(\gamma + \alpha)$$

soit en remplaçant  $F_B$  par son expression,

$$\frac{C}{L}(\alpha - \alpha_0) = F_T \cos(\alpha + \beta) + F_T \sin(\gamma + \alpha) \quad (6)$$

En  $D$ , l'équilibre des forces permet de traduire la tension dans la corde de l'arc  $F_T$  en effort d'archer  $F$ ,

$$F = 2F_T \cos(\gamma) , \quad (7)$$

où le facteur 2 ajoute l'effet de la seconde moitié symétrique de l'arc.

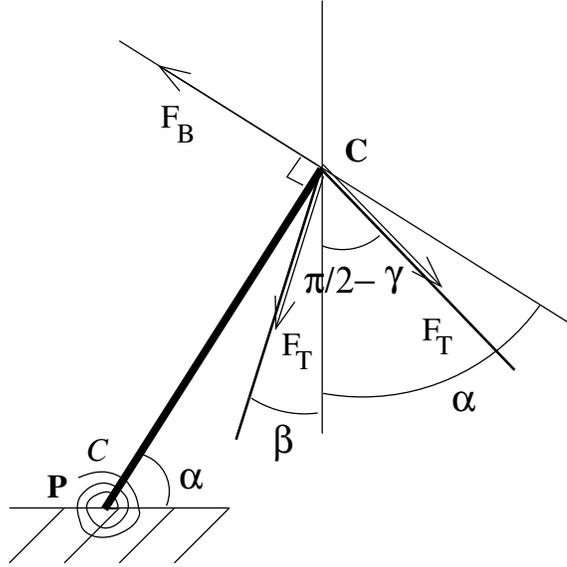


FIG. 5 – Détail des forces et angles en bout de branche, C.

**Déformation de l'arc** La corde est inextensible mais sa longueur visible augmente parce que la poulie de tir tourne. La longueur de corde visible (hors de la poulie) lorsque les poulies ont tourné de  $\theta$ ,  $L_C(\theta)$ , est liée aux positions de C et D par (cf. FIG. 2 et FIG. 3)

$$L_C(\theta) = L_C(\theta_0) + R(\theta - \theta_0) = \frac{\sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2} + \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}}{2} \quad (8)$$

$L_C(\theta_0)$  est la longueur de la corde déroulée quand les poulies sont dans la position  $\theta_0$ . T est le point de tangence de la corde avec la poulie de tir. Ses coordonnées sont données par (cf. FIG. 3)

$$\vec{OT} = \vec{OA} + \vec{AT}$$

soit

$$x_T = -E \cos(\theta) + R \cos(\beta) \quad (9)$$

$$y_T = -E \sin(\theta) - R \sin(\beta) \quad (10)$$

Les coordonnées de C sont

$$x_C = x_P + L \cos(\alpha) \quad (11)$$

$$y_C = y_P + L \sin(\alpha) \quad (12)$$

Enfin, les coordonnées de D sont contrôlées par l'archer. Nous les piloterons également dans la résolution des équations de l'arc.

**Equations de compatibilité des déformations** Les dernières équations nécessaires à l'écriture d'un modèle statique de l'arc sont celles qui expriment la compatibilité des déformations entre les différentes sous-parties de l'arc, i.e.,

$$\vec{OC} = \vec{OP} + \vec{PC} = \vec{OT} + \vec{TC}$$

soit

$$x_P + L \cos(\alpha) = x_T + \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2} \sin(\beta) \quad (13)$$

$$y_P + L \sin(\alpha) = y_T + \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2} \cos(\beta) \quad (14)$$

Ces deux équations ont été résumées<sup>1</sup> en

$$y_P + L \sin(\alpha) = y_T + \frac{x_P - x_T + L \cos(\alpha)}{\tan(\beta)} \quad (15)$$

Enfin, il y a la compatibilité des déformations en D,

$$x_D = x_C + \frac{y_C - y_D}{\tan(\gamma)} \quad (16)$$

### 2.2.2 Résolution des équations

**Problème générique** Le problème de l'équilibre de l'arc est essentiellement formulé à travers les cinq équations, (4), (6), (8), (15) et (16), qui ont cinq inconnues,  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $F_T$  (on remplacera les coordonnées de T et C par leurs expressions, (9), (10), (11) et (12)). Les coordonnées de D sont fixées. La force ressentie par l'archer qui sera ensuite appliquée à la flèche,  $F$ , est finalement obtenue par (7).

**Problème initial : bandage de l'arc** Avant de résoudre le problème générique, il faut bander l'arc. Il s'agit du problème générique précédent, mais simplifié car on sait que  $\gamma = \pi/2$ . Par rapport au problème générique, l'équation (16) est omise. Il reste 4 équations pour 4 inconnues.

**Résolution numérique** L'arc est modélisé dans le langage de calcul scientifique libre Scilab ([11]). Par modélisation, on entend résolutions des systèmes d'équations pour *i*) bander l'arc *ii*) et calculer les configurations d'équilibre pour des allonges  $x_D$  croissantes et *iii*) représenter les résultats. Des exemples de sorties de la modélisation se trouvent en FIG. 18 et FIG. 19. Les équations du système sont non-linéaires. Elles sont résolues par la fonction `fsolve`.

Plus d'une centaine de simulations ont été réalisées dans le cadre de cette étude. Chaque simulation prend de l'ordre de quelques secondes sur un PC standard. Il arrive, pour certains choix des paramètres de l'arc (cf. Section 2.3), que les équations deviennent très difficiles à résoudre (elles deviennent "raides" en jargon de numériciens). Il faut alors faire des pas en  $x_D$  extrêmement petits ce qui peut induire un très grand coût numérique. Nous pensons que ceci correspond à des cas où la pente de la courbe force-allonge devient très grande, c'est à dire que la courbe est quasi-verticale. Ainsi, les arcs pour lesquels la modélisation est difficile sont aussi des arcs au comportement trop brutal pour qu'ils soient potentiellement optimaux.

Notons aussi que nous n'avons pas ajouté de condition de non compression,  $F_T > 0$ , dans la corde. Nos équations peuvent donc prédire une corde en compression alors qu'en réalité elle se plierait. Pour rattraper cela, le calcul de l'effort de l'archer est réalisé dans le programme par

$$F = \max(2F_T \cos(\gamma), 0) \quad (17)$$

La logique est que, quand la corde plie en compression, aucun effort n'est exercé par l'archer.

<sup>1</sup>Il est possible que n'en conserver qu'une des deux, ou conserver les deux, contribuerait à mieux conditionner numériquement les équations du système. Nous n'en avons pas encore fait l'essai.

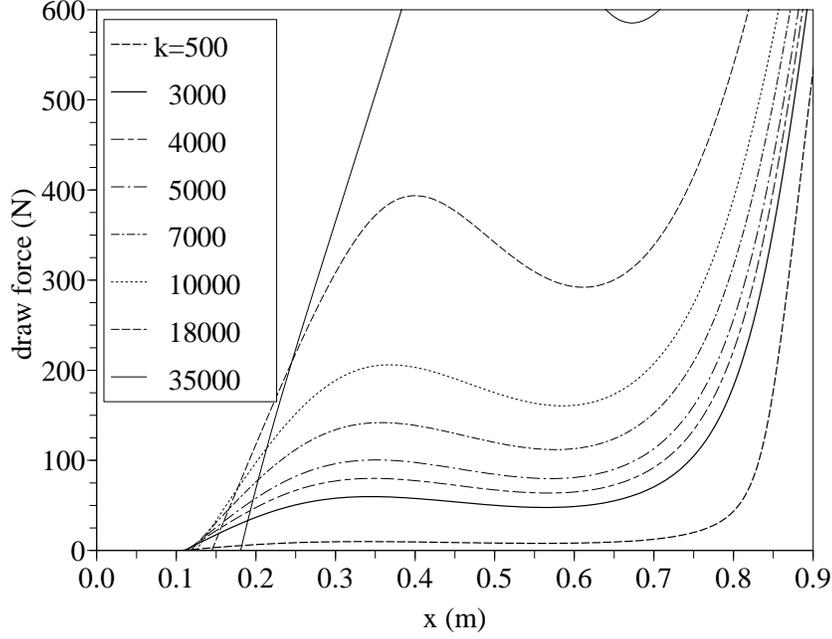


FIG. 6 – Effet de la raideur de ressort  $k$  ( $N/m$ ) sur la courbe effort ( $N$ ) - allonge ( $m$ ).  $C = 2000 Nm$ ,  $L = 0.6 m$ ,  $\alpha_0 = 80^\circ$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $x_P = y_P = y_D = 0$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.1790 m$ ,  $r = 0.03 m$ ,  $e = 0.015 m$ ,  $R = 0.06 m$ ,  $E = 0.05 m$ .  $k = 10000 N/m$  est conservé pour la suite.

## 2.3 Etude paramétrique de l'arc à poulies internes

Nous procédons maintenant à une étude paramétrique de l'arc à poulies internes. Il ne s'agit pas d'optimiser le système mais d'observer l'effet des paramètres sur le comportement de l'arc. Au passage, une amélioration rudimentaire des propriétés sera réalisée. Le principal critère d'amélioration, dans cette section, est le taux de relâchement de l'effort. Dans la section 2.4, un dimensionnement visant à obtenir une réponse plus réaliste sera réalisé.

La méthodologie utilisée consiste à partir d'une configuration de l'arc donnée, puis à faire varier les paramètres un à un dans un ordre pré-déterminé :  $k$ ,  $C$ ,  $\theta_0$ ,  $L_c(\theta_0)$ ,  $E$ ,  $e$ ,  $\alpha_0$ ,  $R$ . Lors de la variation de chaque paramètre, on conserve la meilleure valeur observée (au sens de la courbe allonge - effort) pour les études des autres paramètres.

### 2.3.1 Variation de $k$

Nous commençons par faire varier  $k$ , la raideur du ressort de rappel de la poulie. Les valeurs des autres paramètres sont conservées constantes aux valeurs indiquées en FIG. 6. Les courbes force-allonge sont rassemblées la même figure.

Le principal effet de la variation de  $k$  est de moduler le niveau global des efforts dans l'arc, sans trop dégrader l'allure générale de la courbe. Ceci est visible en FIG. 6 et peut être également anticipé à partir de l'équation (4). Cet effet est très pratique et sera utilisé notamment lors du dimensionnement de l'arc (section 2.4).  $k = 10000 N/m$  est une valeur qui donne un bon compromis entre relâchement de

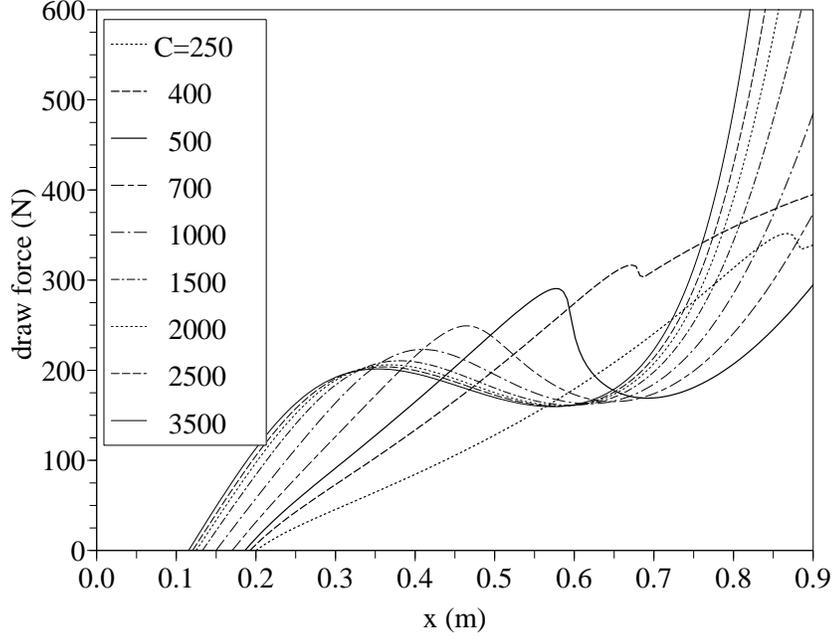


FIG. 7 – Effet de la raideur de la branche,  $C$  ( $Nm$ ) sur la courbe effort ( $N$ ) - allonge ( $m$ ).  $k = 10000 N/m$ ,  $L = 0.6 m$ ,  $\alpha_0 = 80^\circ$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $x_P = y_P = y_D = 0$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.1790 m$ ,  $r = 0.03 m$ ,  $e = 0.015 m$ ,  $R = 0.06 m$ ,  $E = 0.05 m$ . AN : les courbes de  $C = 250$  et  $400 Nm$  correspondent à des équations imparfaitement résolues.  $C = 500 Nm$  est conservé pour la suite.

l'effort et niveau général de l'effort. Elle sera utilisée dans la suite.

### 2.3.2 Variation de $C$

Comme on peut le constater sur la FIG. 7, lorsque la raideur de la branche augmente, autour d'un régime favorable de fonctionnement de l'arc (basculement du mécanisme en cours de charge), le pic de charge diminue en intensité, il se décale légèrement vers les faibles allonges et il s'arrondit.

### 2.3.3 Variation de $\theta_0$

L'effet de la position initiale du mécanisme sur les courbes force-allonge est montré en FIG. 8. Nous rappelons que quand  $\theta = \theta_0$ , le ressort de rappel n'exerce aucune action. Il n'existe de phénomène de décharge que pour  $\theta_0$  compris entre  $-20^\circ$  et  $20^\circ$ . Cette étude paramétrique mériterait d'ailleurs d'être affinée dans cet intervalle. Hors de cet intervalle, il n'y a plus de bascule en cours de charge et la force croit toujours au cours de l'allonge.

$\theta_0 = 0^\circ$  est conservé comme meilleure valeur, conformément à l'intuition : en  $\theta_0 = 0^\circ$ , le système débute sa mise en charge avec un avantage au ressort de rappel qui a un plus grand levier  $\Delta_B$  que la force de tension de la corde de levier  $\Delta_A$  (cf. FIG. 4). L'archer doit donc produire un effort initial augmentant rapidement sur la corde. Plus tard, la situation s'inverse.

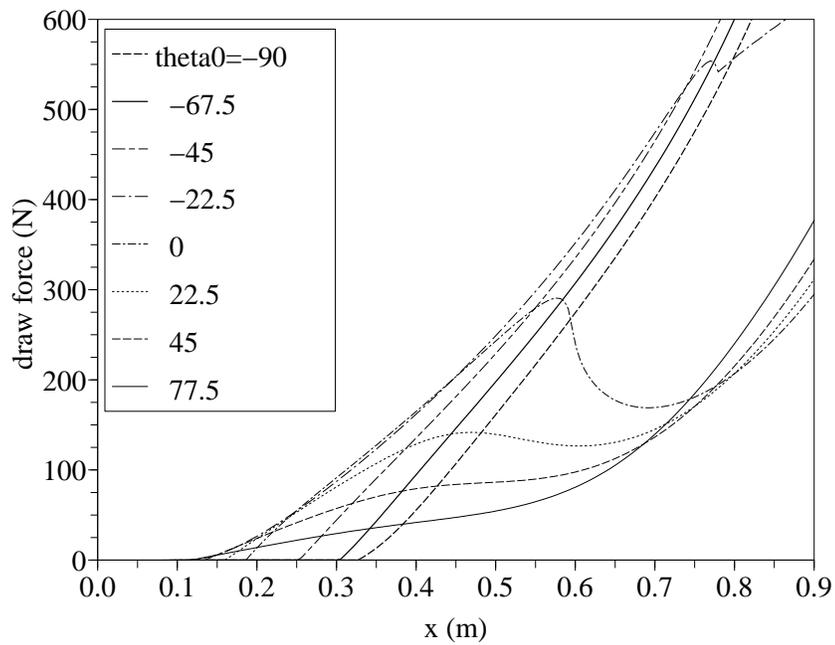


FIG. 8 – Effet de la rotation initiale de la poulie,  $\theta_0$  ( $^\circ$ ) sur la courbe effort ( $N$ ) - allonge ( $m$ ).  $k = 10000 \text{ N/m}$ ,  $C = 500 \text{ Nm}$ ,  $L = 0.6 \text{ m}$ ,  $\alpha_0 = 80^\circ$ ,  $x_P = y_P = y_D = 0$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.1790 \text{ m}$ ,  $r = 0.03 \text{ m}$ ,  $e = 0.015 \text{ m}$ ,  $R = 0.06 \text{ m}$ ,  $E = 0.05 \text{ m}$ . AN : les courbes de  $\theta_0 = -67.5$  à  $-22.5^\circ$  correspondent à des équations imparfaitement résolues.  $\theta_0 = 0^\circ$  est conservé comme meilleure valeur.

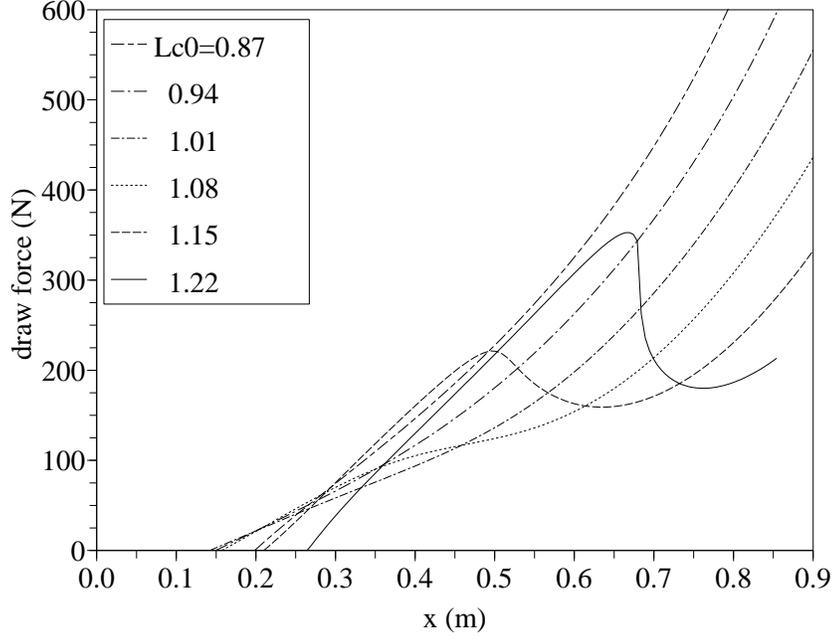


FIG. 9 – Effet de la longueur initiale de la corde,  $L_c(\theta_0)$  (m) sur la courbe effort (N) - allonge (m).  $k = 10000 \text{ N/m}$ ,  $C = 500 \text{ Nm}$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $L = 0.6 \text{ m}$ ,  $\alpha_0 = 80^\circ$ ,  $x_P = y_P = y_D = 0$ ,  $r = 0.03 \text{ m}$ ,  $e = 0.015 \text{ m}$ ,  $R = 0.06 \text{ m}$ ,  $E = 0.05 \text{ m}$ .  $L_c(\theta_0) = 1.1790 \text{ m}$  est conservé comme meilleure valeur.

### 2.3.4 Variation de $L_c(\theta_0)$

L'effet de la longueur de corde à vide sur l'arc est étudié en FIG. 9. Lorsque la longueur de corde est faible (ici inférieure à  $1.15 \text{ m}$ ), le mécanisme bascule dès la mise en tension de l'arc, ce qui annule le relâchement en cours de tir. Lorsque la corde est plus longue que  $1.2 \text{ m}$  environ, elle n'est pas tendue au départ ce qui explique que  $F$  soit nul jusqu'à une assez grande allonge,  $0.27 \text{ m}$  sur la FIG. 9. Pour des grandes cordes, le phénomène de bascule est plus brutal et tardif (pic vers  $0.65 \text{ m}$ ).  $L_c(\theta_0) = 1.1790 \text{ m}$  paraît être, pour ces jeux de paramètres, un bon réglage.

### 2.3.5 Variation de $E$

L'influence de l'excentrique de la poulie de tir,  $E$ , sur la courbe force-allonge de l'arc est représentée en FIG. 10. On a fait croître  $E$  jusqu'à  $R - 5 \text{ mm}$ . Lorsque  $E$  augmente, le pic de force a lieu plus tôt dans le tir, l'amplitude maximale décroît mais celle de la décharge croît et les transitions sont plus progressives (courbes plus rondes). Pour toutes ces raisons, on choisit  $E$  le plus grand possible.

### 2.3.6 Variation de $e$

On constate en FIG. 11 qu'un accroissement de  $e$ , l'excentrique de la poulie de rappel, augmente les amplitudes du pic de force et, plus encore, l'amplitude de la décharge. Il est intéressant de remarquer que la variation de  $e$  ne modifie ni le

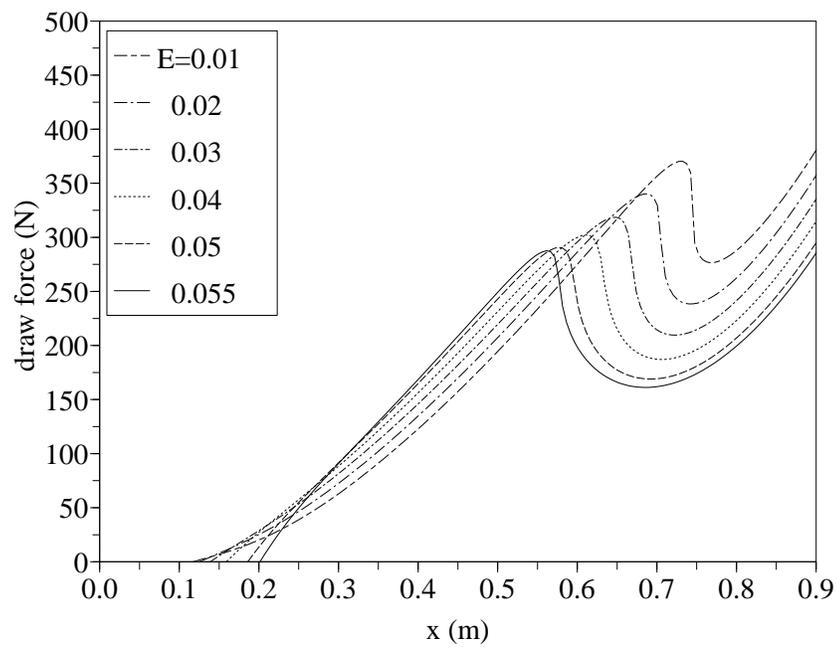


FIG. 10 – Effet de l’eccentricité de la poulie de corde de tir,  $E$  (m) sur la courbe effort (N) - allonge (m).  $k = 10000$  N/m,  $C = 500$  Nm,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.1790$  m,  $L = 0.6$  m,  $\alpha_0 = 80^\circ$ ,  $x_P = y_P = y_D = 0$ ,  $r = 0.03$  m,  $e = 0.015$  m,  $R = 0.06$  m.  $E = 0.055$  m est conservé comme meilleure valeur.

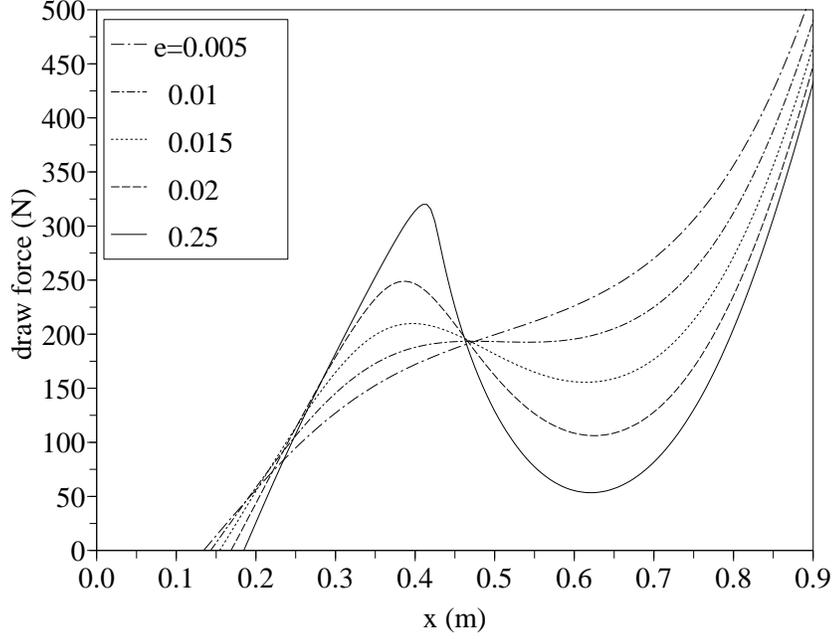


FIG. 11 – Effet de l’eccentricité de la poulie de rappel,  $e$  ( $m$ ) sur la courbe effort ( $N$ ) - allonge ( $m$ ).  $k = 10000 N/m$ ,  $C = 1000 Nm$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.1790 m$ ,  $L = 0.6 m$ ,  $\alpha_0 = 80^\circ$ ,  $x_P = y_P = y_D = 0$ ,  $r = 0.03 m$ ,  $E = 0.055 m$ ,  $R = 0.06 m$ . Remarquer que  $C = 1000 Nm$ , et non pas  $C = 500 Nm$ , a été utilisé ici de manière à avoir des modélisations entièrement convergées en un temps de calcul raisonnable.  $e = 0.02 m$  est conservé comme meilleure valeur.

moment de la décharge (ici vers  $0.41 m$ ) ni la valeur moyenne sur tout le tir des forces<sup>2</sup>.

### 2.3.7 Variation de $\alpha_0$

Comme le montre la FIG. 12, on peut augmenter  $\alpha_0$ , l’angle de la branche avec l’horizontal, pour déplacer la décharge vers les petites allonges. En fait, accroître  $\alpha_0$  augmente la tension initiale dans le système et avance le moment de la bascule des poulies. Simultanément, le maximum de force avant décharge diminue et le minimum de force après décharge reste constant.

### 2.3.8 Réduction de l’encombrement, variation de $R$

Pour réduire l’encombrement du mécanisme dans la poignée de l’arc, on cherche maintenant à réduire la somme des rayons des poulies. Plus précisément, on diminue  $R$  en conservant les rapports  $r/R = 1/2$ ,  $e/R = 0.02/0.06 = 1/3$  et  $E/R = 0.055/0.06 = 0.91666$  constants. Cette idée est suggérée par l’équation (4), qui montre que la tension de la corde reste constante lorsque tous ces rapports sont constants si  $\beta$  et  $\theta$  ne changent pas trop. Par contre, l’équation (8) montre que la

<sup>2</sup>Ce constat est approximatif mais valide en première approximation. Il pourrait de manière équivalente être exprimé en énergies totales libérées constantes car, pour la moyenne comme pour l’énergie, on parle de  $\int_0^{\text{allonge max}} F dx$ .

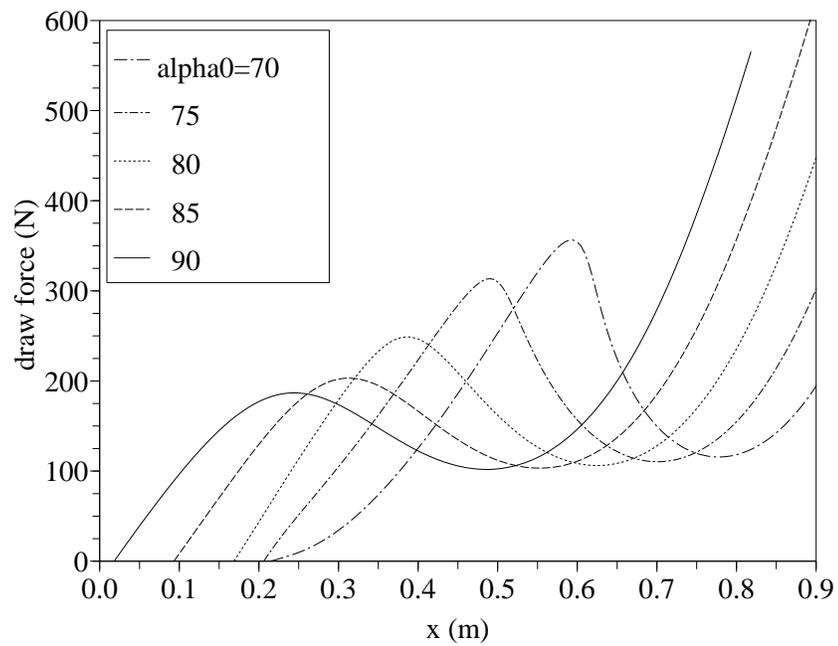


FIG. 12 – Effet de la position de la branche non chargée,  $\alpha_0$  ( $^\circ$ ) sur la courbe effort (N) - allonge (m).  $k = 10000$  N/m,  $C = 1000$  Nm,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.1790$  m,  $L = 0.6$  m,  $x_P = y_P = y_D = 0$ ,  $r = 0.03$  m,  $E = 0.055$  m,  $e = 0.02$  m,  $R = 0.06$  m.  $\alpha_0 = 75^\circ$  est retenu par la suite.

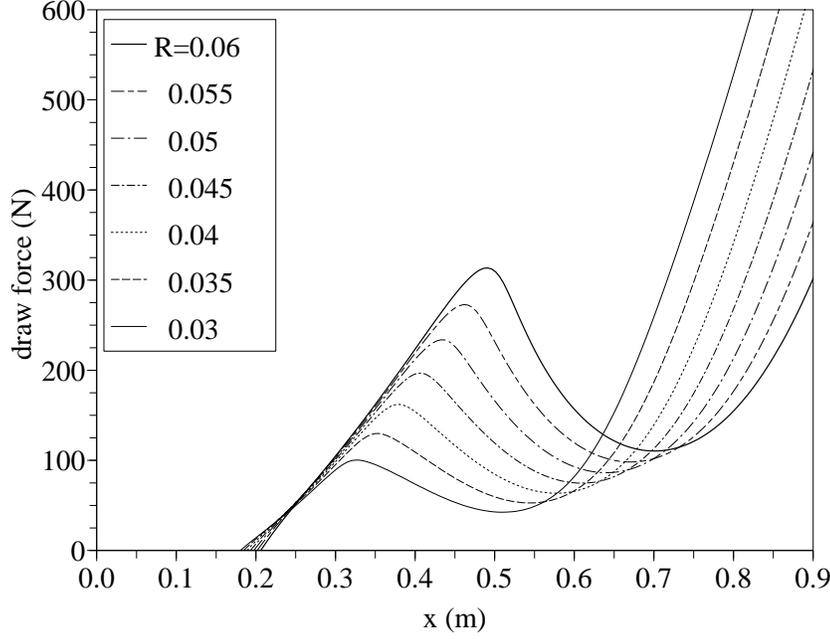


FIG. 13 – Variation du rayon de la poulie de tir,  $R$  (m) à rapports  $r/R$ ,  $e/R$  et  $E/R$  constants (et égaux, respectivement, à  $1/2$ ,  $1/3$  et  $0.055/0.06$ ). Effet sur la courbe effort (N) - allonge (m).  $k = 10000$  N/m,  $C = 1000$  Nm,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.1790$  m,  $L = 0.6$  m,  $\alpha_0 = 75^\circ$ ,  $x_P = y_P = y_D = 0$ .

longueur de corde injectée dans le système dépend de  $R$ . La figure FIG. 13 illustre l'effet d'une telle variation de  $R$  à rapports constants. Le moment de la décharge intervient pour une allonge plus faible et l'intensité de la décharge diminue à mesure que  $R$  décroît.

En FIG. 14, une solution à encombrement réduit (dite solution 2) est comparée à la solution courante (dite solution 1).

### 2.3.9 Réduction de l'encombrement, variation de $r$

Une seconde idée pour réduire l'encombrement est de diminuer  $r$ , le rayon de la poulie de rappel, tout en compensant en augmentant  $k$  de manière à ce que le moment de la force de rappel autour de O reste similaire. Soit une solution de référence indiquée par 1 et une nouvelle solution indiquée par 2, on écrit la conservation des moments,

$$\Delta_{B,1}F_{R,1} = \Delta_{B,2}F_{R,2}$$

On écrit cette relation pour  $\theta = \pi/2$ , i.e. à mi-chemin de la bascule des poulies et pour  $\theta_0 = 0$ . Les expressions des moments et forces données dans (1), (2) et (3) permettent d'exprimer la valeur  $k_2$  qui compense  $r_2$ ,

$$k_2 = k_1 \frac{r_1(r_1 \frac{\pi}{2} + e_1)}{r_2(r_2 \frac{\pi}{2} + e_2)} = k_1 \frac{r_1(r_1 \frac{\pi}{2} + e_1)}{r_2^2(1 + \frac{\pi}{2} - r_2 \delta)} \quad (18)$$

où nous avons fait l'hypothèse que  $e_2$  était aussi grand que possible,  $e_2 = r_2 - \delta$  et  $\delta = 0.005$  m.

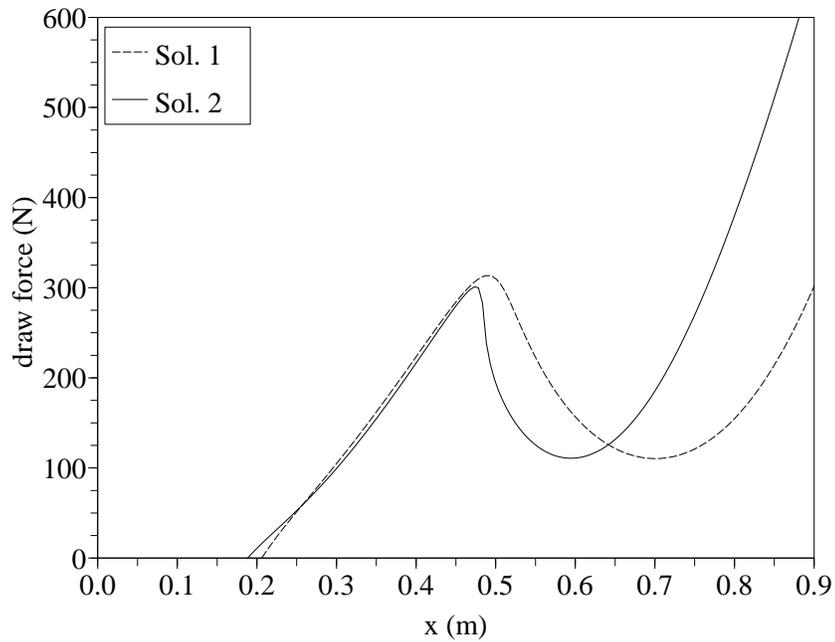


FIG. 14 – Comparaison de deux jeux de poulies internes à travers la courbe effort ( $N$ ) - allonge ( $m$ ). La solution 2 a un encombrement inférieur à la solution 1 (encombrements de  $0.116$  et  $0.165$   $m$ , respectivement, où encombrement =  $R + r + E + e$ ). Par contre, la solution 2 montre une accélération plus brutale lors du tir (pente importante de la décharge). Solution 1 :  $R = 0.06$ ,  $r = 0.03$ ,  $E = 0.055$  et  $e = 0.02$ . Solution 2 :  $R = 0.04$ ,  $r = 0.025$ ,  $E = 0.035$  et  $e = 0.016$ . Pour les deux solutions, les autres caractéristiques sont  $k = 10000$   $N/m$ ,  $C = 1000$   $Nm$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.1790$   $m$ ,  $L = 0.6$   $m$ ,  $\alpha_0 = 75^\circ$ ,  $x_P = y_P = y_D = 0$ .

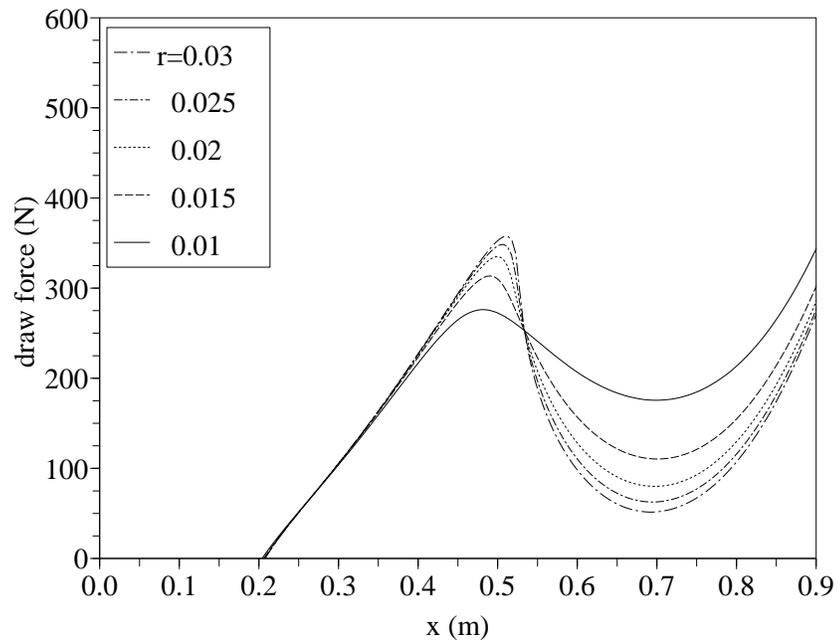


FIG. 15 – Variation du rayon de la poulie de rappel,  $r$  (m) avec  $e = r - 0.005$  et  $k$  recalculé pour conserver le moment en  $\theta = \pi/4$  (formule (18)). Effet sur la courbe effort (N) - allonge (m).  $R = 0.06$  m,  $E = 0.055$  m,  $C = 1000$  Nm,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.1790$  m,  $L = 0.6$  m,  $\alpha_0 = 75^\circ$ ,  $x_P = y_P = y_D = 0$ .

Les réponses statiques en variant  $r$  de cette façon entre 3 et 1  $cm$  sont rassemblées en FIG. 15. On s'aperçoit que l'encombrement peut être fortement réduit de cette manière au prix d'une réduction de décharge d'effort. C'est logique car  $e$  diminue avec  $r$  et moins il y a d'excentrique, moins la décharge est grande. Une continuation de cette idée serait de supprimer la poulie de rappel et la remplacer par un ressort de torsion (dans le principe équivalent à faire tendre  $r$  vers 0), puis d'étudier si la réduction de décharge peut être compensée par un accroissement de l'excentrique de poulie de tir  $E$ .

### 2.3.10 Etude d'un arc à branche courte

Nous étudions maintenant les potentialités de branches courtes disposées au dessus de la poignée, dans l'esprit des arcs Oneida-Eagle [8]. Notre paramétrisation nous permet de réaliser une telle étude : la longueur des branches est fixée à  $L = 0.3 m$  et on fait varier le point de rotation de la branche,  $P$ . Pour que cette variation ait un sens, on impose de plus une taille d'arc constante.

On définit la taille de l'arc comme une hauteur type du demi-arc à branche longue,

$$T = 0.6 \sin(\alpha_0) \quad (19)$$

Ici  $\alpha_0 = 75^\circ$ . Lorsque  $y_P$  varie,  $\alpha_0$  et  $L_c(\theta_0)$  sont ajustés pour que l'arc ait la même taille  $T$ ,

$$y_P + L \sin(\alpha_0) = 0.6 \sin(75^\circ) \quad (20)$$

soit

$$\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{0.6 \sin(75\pi/180) - y_P}{0.3}\right) \quad (21)$$

Après un tel changement de géométrie, il est également nécessaire d'ajuster la longueur de la corde de l'arc. La longueur initiale de la corde est estimée par  $L_c(\theta_0) = 0.99 \times (\|OC\| + \|CD\|)$  (cf. FIG. 2) dans la configuration initiale de l'arc soit

$$L_c(\theta_0) = 0.99 \left( \sqrt{y_P^2 + L^2 - 2y_P L \cos(\alpha_0 + \pi/2)} + y_P + L \sin(\alpha_0) \right) \quad (22)$$

Les résultats de cette expérience sont donnés en FIG. 16. Ils confirment que l'architecture à bras courts est potentiellement intéressante : pour  $y_P$  entre 0.33 et 0.53, l'amplitude de la décharge d'efforts est plus importante que dans la configuration à branches longues ( $L = 0.6 m$ ). Par exemple, pour  $y_P = 0.43$ , l'effort se relâche de 400 à 100  $N$  environs en 25  $cm$  d'allonge. 400  $N$  est excessif pour un arc réel. Ce niveau doit cependant pouvoir être descendu en diminuant  $k$  et en ajustant  $C$  (cf. Section 2.4 sur le dimensionnement).

## 2.4 Dimensionnement

Dans cette section, les enseignements donnés de l'étude paramétrique sont mis à profit pour trouver manuellement (par essais-erreurs) des solutions s'approchant au mieux de courbes force-allonge réputées favorables.

Les caractéristiques de telles courbes sont celles de la courbe référence de la FIG. 1 : il y a un maximum de force de 220 à 310  $N$  obtenu pour une allonge de 40 à 45  $cm$  puis une décharge de 50 à 80% de la force maximale avec un minimum atteint pour une allonge de 71  $cm$ .

Par rapport à l'étude paramétrique, nous avons cherché à limiter le rayon de la poulie de ressort pour qu'il n'y ait pas trop de fil de ressort à enrouler (et donc à stocker dans la poignée). Un second bénéfice de cette limitation est qu'en diminuant le rayon de la poulie de ressort, on diminue l'encombrement global du mécanisme.

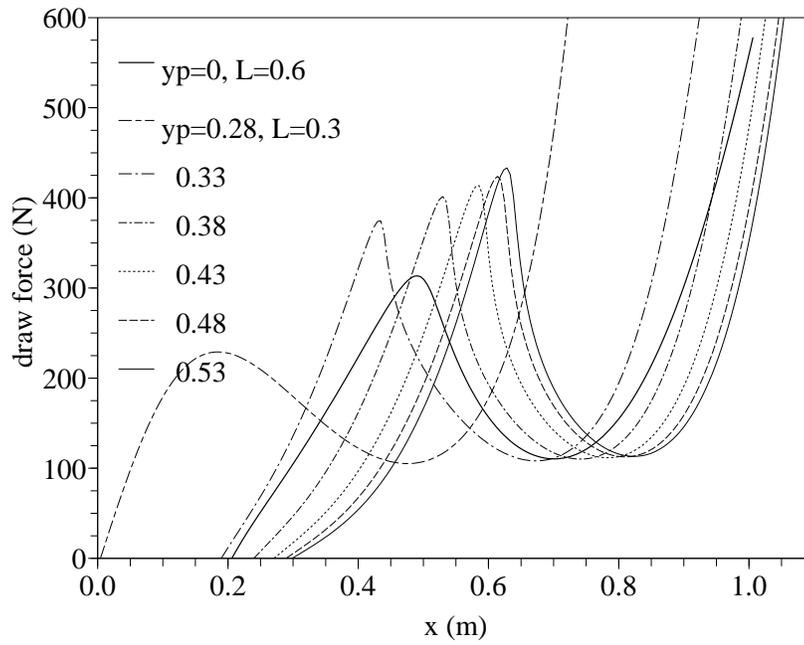


FIG. 16 – Effet de la position d’une branche courte sur la courbe effort ( $N$ ) - allonge ( $m$ ).  $y_P$  varie,  $\alpha_0$  et  $L_c(\theta_0)$  sont ajustés en fonction de  $y_P$  au moyen des relations (21) et (22), respectivement.  $k = 10000 \text{ N/m}$ ,  $C = 1000 \text{ Nm}$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $L = 0.6 \text{ m}$ ,  $x_P = y_D = 0$ ,  $r = 0.03 \text{ m}$ ,  $E = 0.055 \text{ m}$ ,  $e = 0.02 \text{ m}$ ,  $R = 0.06 \text{ m}$ . Une courbe d’arc à branche longue est ajoutée pour comparaison.

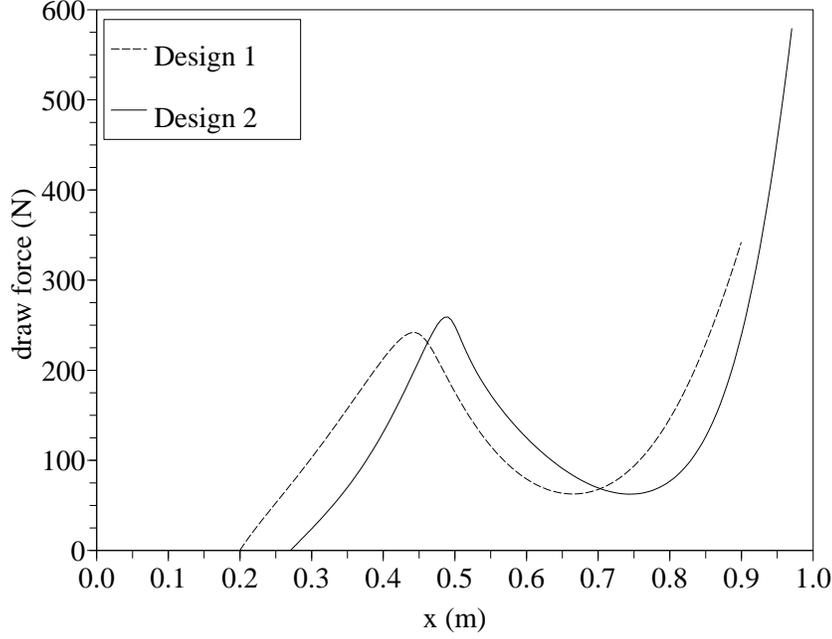


FIG. 17 – Comparaison de deux designs à courbe force ( $N$ ) - allonge ( $m$ ) réalistes. Design 1 :  $L = 0.6\text{ m}$ ,  $\alpha_0 = 75^\circ$ ,  $y_P = 0\text{ m}$ ,  $k = 16000\text{ N/m}$ ,  $C = 1000\text{ Nm}$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.1790\text{ m}$ . Design 2 :  $L = 0.3\text{ m}$ ,  $\alpha_0 = 30^\circ$ ,  $y_P = 0.4295\text{ m}$ ,  $k = 16000\text{ N/m}$ ,  $C = 1400\text{ Nm}$ ,  $L_c(\theta_0) = 1.2000\text{ m}$ . Pour les deux solutions, les autres caractéristiques sont  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $x_P = y_D = 0$ ,  $R = 0.055$ ,  $r = 0.02$ ,  $E = 0.050$  et  $e = 0.015$ . Le design 1 semble préférable (pic intervenant plus tôt, transition plus progressive). Les cinématiques de ces arcs sont montrées en FIG. 18 et FIG. 19.

Deux solutions sont retenues dont les courbes force-allonge sont représentées en FIG. 17 et les cinématiques en FIG. 18 et FIG. 19. Ces deux arcs atteignent bien les objectifs de l'étude en terme de réponse statique, ce qui montre la faisabilité et la potentialité de l'arc à poulies internes. L'encombrement de ces solutions est de  $r + R + e + E = 14\text{ cm}$ . Une continuation de ce travail serait de chercher à limiter au maximum cet encombrement. Les essais-erreurs réalisés, en particulier en section 2.3.9, nous laissent croire que, à allonge maximale et taille d'arc constantes, il est possible de gagner au moins  $2\text{ cm}$ . La réduction d'encombrement est associée à une diminution des bonnes propriétés de la courbe de réponse statique, en particulier l'amplitude de décharge. Pour réduire davantage l'encombrement, il faudra ainsi préciser quel effort maximal est acceptable en position de tir.

## 2.5 Etude expérimentale

Un prototype de l'arc à poulies internes a été réalisé. Il est dessiné en FIG. 20 et photographié en FIG. 21. Ses paramètres sont  $R = 6\text{ cm}$ ,  $r = 3\text{ cm}$ ,  $E = 5\text{ cm}$ ,  $e = 2\text{ cm}$ ,  $k = 5000\text{ N/m}$ , et  $C = 250\text{ Nm}$ .  $C$  est calculé pour la branche réelle par  $C = F_B L^2 / d$  avec  $L = 0.5\text{ m}$  la longueur de la branche,  $F_B$  et  $d$  les forces et déplacements transverses en bout de branche, et le jeu de données  $(F_B, d) = \{(9.81, 0.01), (29.43, 0.06), (78.48, 0.08)\}$  en  $(N, m)$ .

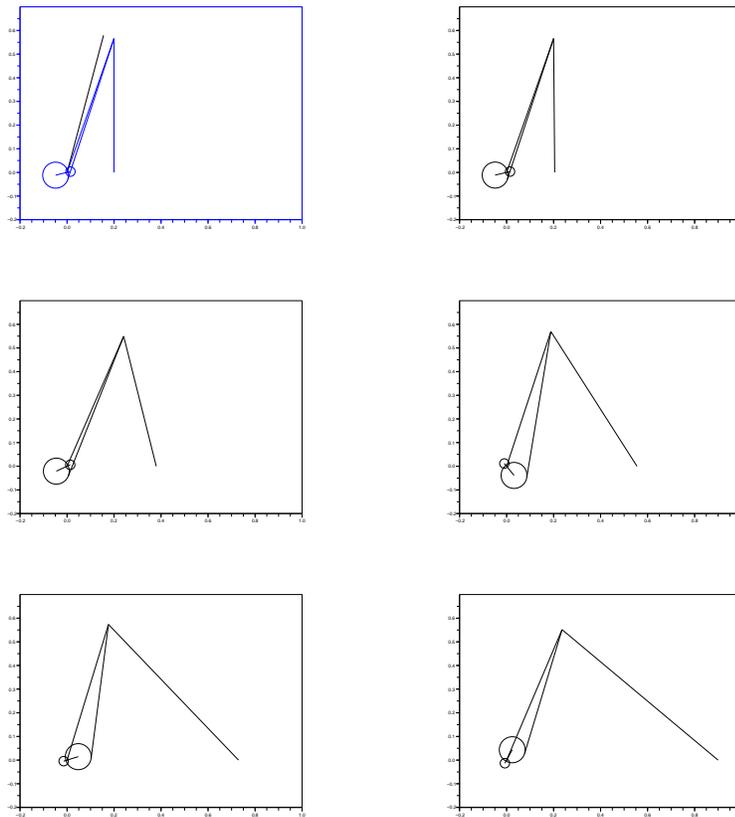


FIG. 18 – Mise en charge de l’arc “design 1” (lecture de gauche à droite et de haut en bas), à longue branche. La courbe de charge et toutes les caractéristiques de cet arc sont en FIG. 17. En haut à gauche, le trait sans corde correspond à la branche au repos avant que la corde ne soit mise.

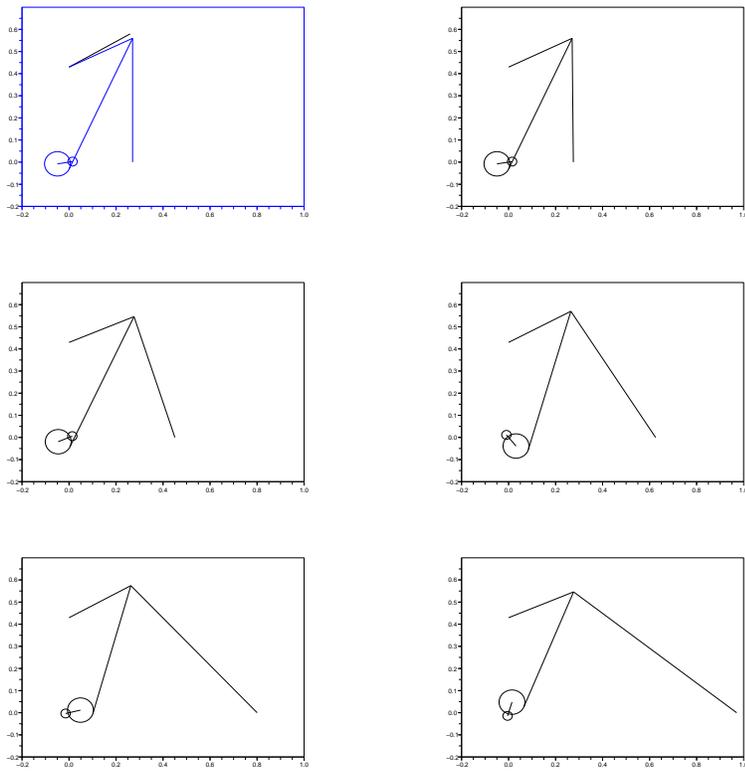


FIG. 19 – Mise en charge de l’arc “design 2” (lecture de gauche à droite et de haut en bas), à courte branche. La courbe de charge et toutes les caractéristiques de cet arc sont en FIG. 17. En haut à gauche, le trait sans corde correspond à la branche au repos avant que la corde ne soit mise.

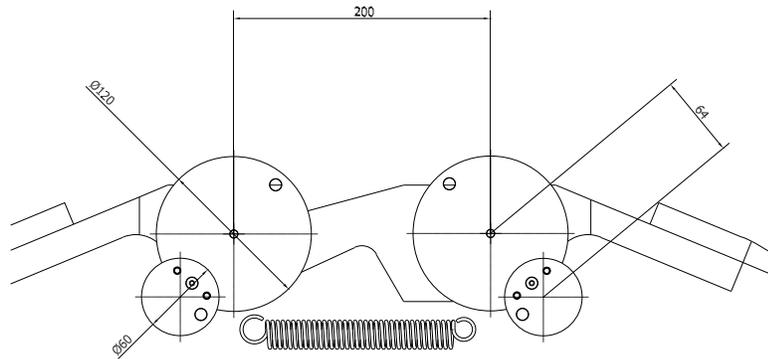
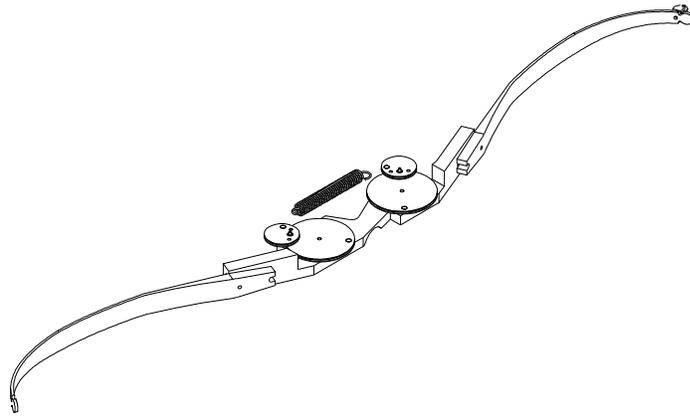


FIG. 20 – Dessin du prototype d'arc à poulies internes réalisé.

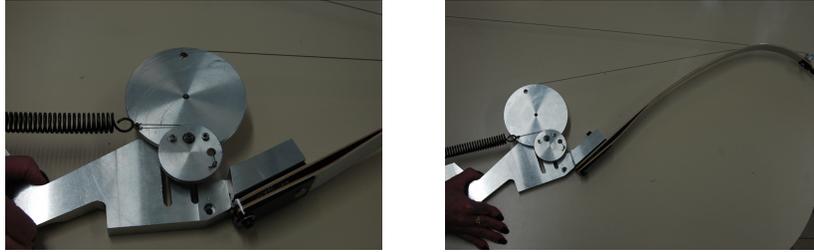


FIG. 21 – Photographies du prototype d’arc à poulies internes. Les paramètres du prototype sont  $R = 6 \text{ cm}$ ,  $r = 3 \text{ cm}$ ,  $E = 5 \text{ cm}$ ,  $e = 2 \text{ cm}$ ,  $k = 5000 \text{ N/m}$ ,  $C = 250 \text{ Nm}$ .



FIG. 22 – Exemple de dérive asymétrique des poulies.

Une réponse force-allonge mesurée dans le cadre du projet d’étudiant de l’Annexe B est donnée en FIG. 23. Malgré les nombreuses imperfections du prototype, il confirme bien que l’arc à poulies internes génère bien une courbe force-allonge avec décharge. Il manque à cette première version du prototype une fixation qui empêche le ressort de dériver d’un côté de l’arc comme on en trouve une illustration sur la photographie de FIG. 22. Une amélioration est en cours de mise en œuvre où le ressort central est coupé en deux parties indépendantes, chacune étant fixée à la poignée. Cette modification doit garantir la préservation de la symétrie lors des rotations de poulies.

### 3 L’arc à appuis internes

#### 3.1 Présentation du concept

Une explication du principe de l’arc à appuis internes au moyen de corps rigides est donnée en FIG. 24. Dans la position initiale, sur le croquis de gauche, un appui empêche la branche de l’arc de tourner autour de la rotule. Sous l’action de la composante horizontale de la tension de la corde, le système se déplace vers la droite jusqu’au moment où l’appui passe à gauche de la rotule (schéma de droite). Alors, la branche peut librement tourner autour de la rotule. Elle n’exerce plus aucun effort.

L’arc à appuis internes reprend ce principe au moyen de solides déformables, donc d’une manière plus continue (cf. FIG. 25). Il joue sur le fait qu’une poutre mince peut être transversalement flexible quoique très rigide suivant sa longueur. La rotule des corps rigides est remplacée par une zone de grande flexibilité. L’appui est créé par une poutrelle. Le déplacement de l’appui, initialement en contact dans

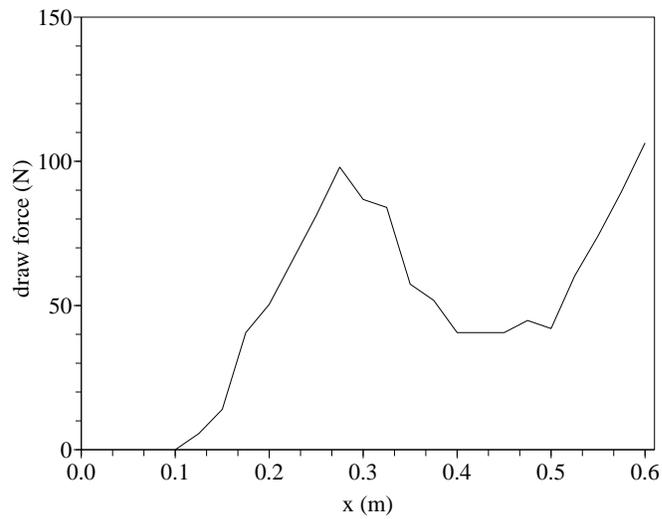


FIG. 23 – Courbe d’effort du prototype de la FIG. 21.

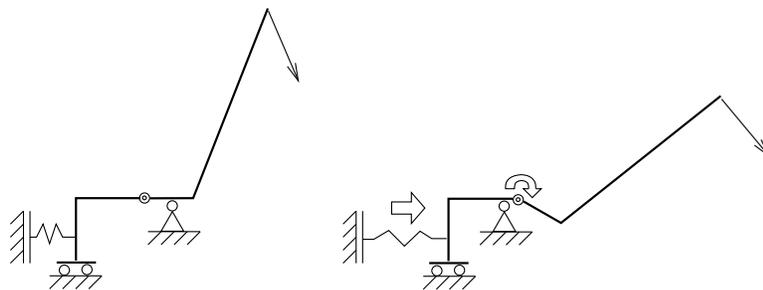


FIG. 24 – Idée de l’arc à appuis internes par mouvements de corps rigides. Les doubles ronds sont des rotules et les droites hachurées des points fixés à la poignée. A gauche, l’appui empêche la branche de tourner. A droite, la branche peut tourner autour de la rotule. Elle n’exerce plus aucun effort.

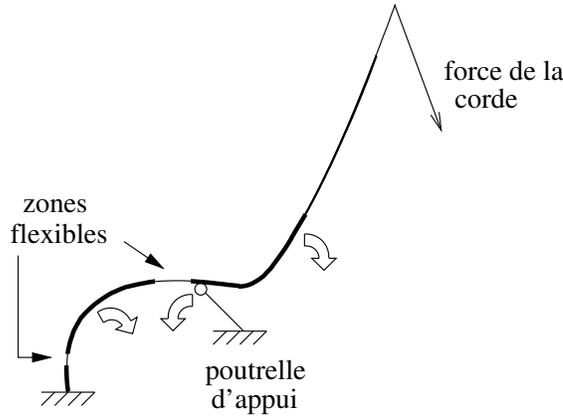


FIG. 25 – Schéma de principe de l'arc à appuis internes. Les doubles flèches indiquent les déformations du système sous charge. L'épaisseur du trait est représentative de la rigidité de flexion. Le contact de l'appui se déplace vers la zone de faible rigidité de flexion.

une zone à grande raideur de flexion, vers la zone flexible est assuré à la fois par la force de traction de la corde et par la flexion de la poutrelle. Une fois l'appui dans la zone à faible rigidité flexion, la branche de l'arc plie et la force exercée par l'archer chute pour une allonge donnée.

L'arc à appuis internes nous paraît être une piste intéressante pour répondre au problème posé. C'est un arc avec relaxation d'effort, sans mécanisme, et avec une unique corde de tir. Il est probable que l'arc à appuis internes puisse avoir une ligne pure. Contrairement aux arcs à poulies internes et externes, la force de tir ne croît pas en fin d'allonge d'arc à appuis. Cette différence ne pose pas, a priori, de problème de confort de tir ou de dynamique.

Dans la section 3.2, deux approches pour modéliser la réponse statique d'un arc à appuis internes sont données. Le modèle simplifié (3.2.1) confirme l'intuition du relâchement d'efforts.

Le travail de compréhension de l'arc à appuis internes mérite d'être prolongé. Dans un premier temps, il faudrait confirmer, par le calcul et par un prototype, que l'arc à appuis internes parcourt le même trajet force-allonge en sens inverse lors du tir. Dans un second temps, les modélisations par éléments finis devraient être mieux maîtrisées pour pouvoir réaliser un dimensionnement en statique de l'arc. Enfin, il faudrait modéliser et tester sur un prototype le comportement dynamique de cet arc.

## 3.2 Modélisation de l'arc à appuis internes

### 3.2.1 Modèle analytique

Pour tester le concept de l'arc à appuis internes et, à terme, pouvoir le dimensionner, un modèle simple, dont les équations peuvent être explicitées, a été écrit. Il est présenté en Annexe D. Nous n'en reproduisons ici que la définition et le principal résultat.

Le système approchant l'arc à appuis internes utilisé pour construire le modèle analytique de l'arc est dessiné en FIG. 26. Il est composé de 4 segments de longueurs  $l_i$ , parfaitement rigides et articulés entre eux par des ressorts de torsion de raideurs  $C_i$ . Les segments 3 et 4 constituent une exception car ils ne sont pas articulés et inclinés de  $\alpha$  relativement l'un à l'autre. La corde est de longueur  $L$ .

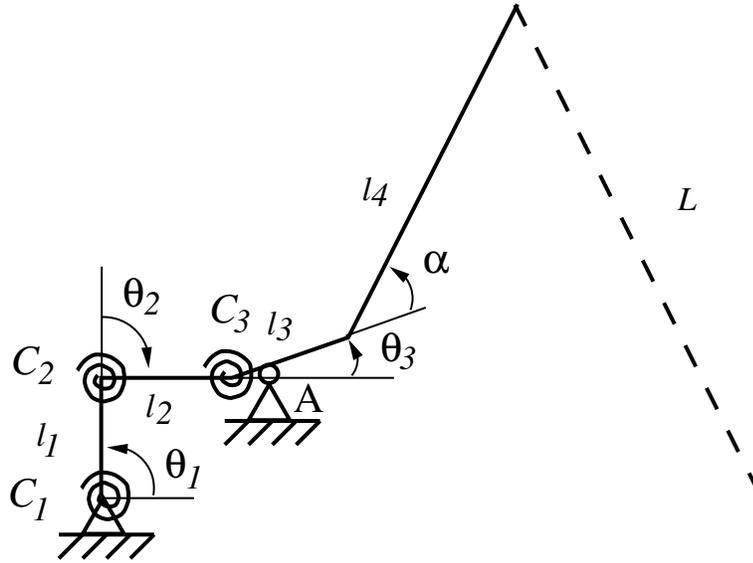


FIG. 26 – Le modèle analytique de l’arc à appuis internes. Définition de ses paramètres.

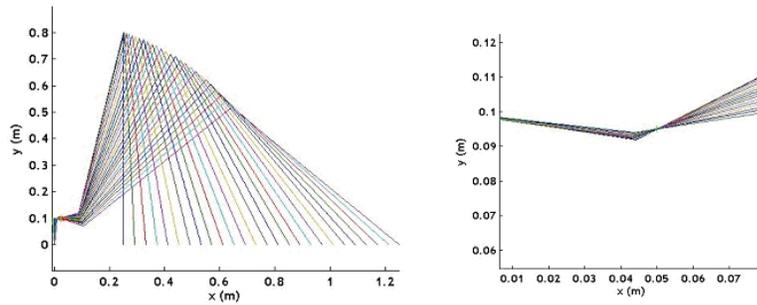


FIG. 27 – Cinématique du modèle simplifié de l’arc à appuis internes. A droite, zoom autour du point d’appui.

Les équations de ce modèle sont obtenues par des raisonnements similaires à ceux de la section 2 pour l’arc à poulies internes. Une difficulté supplémentaire vient de la gestion du contact sans frottement au point A. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les détails de ce modèle à l’Annexe D.

Des résultats avec cette modélisation sont fournis en FIG. 27 et FIG. 28 pour la configuration suivante :  $l_1 = 0.1 \text{ m}$ ,  $l_2 = 0.05 \text{ m}$ ,  $l_3 = 0.05 \text{ m}$ ,  $l_4 = 0.7 \text{ m}$ ,  $L = 0.8 \text{ m}$ ,  $\alpha = 50^\circ$ ,  $\theta_1^0 = 90^\circ$ ,  $\theta_2^0 = -100^\circ$ ,  $\theta_3^0 = 45^\circ$ ,  $C_1 = 40 \text{ Nm}$ ,  $C_2 = 50 \text{ Nm}$ ,  $C_3 = 30 \text{ Nm}$ ,  $x_A = 0.04 \text{ m}$ ,  $y_A = 0.095 \text{ m}$ . Les angles  $\theta_i^0$  sont ceux pour lesquels il n’y a pas de moment de torsion exercé (angles à vide).

En FIG. 27, la cinématique de ce modèle peut être visualisée. Notons que, comme dans l’arc à poulies internes, le problème préliminaire de bandage d’arc est résolu avant les mouvements dessinés sur cette figure. La courbe force de tir versus allonge est donnée en FIG. 28. Elle confirme bien qu’à partir du moment où l’appui A passe du segment 3 au segment 2 et libère la rotule  $C_3$  la force exercée par l’archer décroît. Le niveau faible des efforts (une trentaine de  $N$  maximum) s’explique par

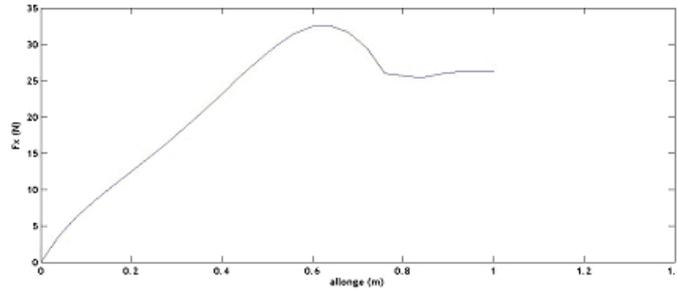


FIG. 28 – Réponse statique du modèle simplifié de l’arc à appuis internes.

les raideurs de ressorts également trop faibles.

Ce modèle simplifié pourrait être amélioré des manières suivantes :

- Accroître les raideurs de torsion.
- Retravailler la gestion du contact pour rendre la simulation plus fiable.
- Mettre le point d’appui A au bout d’une poutrelle.

### 3.2.2 Modèle par éléments finis

Une analyse par éléments finis de l’arc à appuis internes a également été tentée. Les branches de l’arc ont été représentées par des éléments poutres non linéaires géométriquement car en grands déplacements. La corde de l’arc a été modélisée comme une poutre très rigide (300 MPa) en liaison articulée avec la branche. Une analyse de contact surface-surface sans frottement et sans rupture de contact entre la poutrelle d’appui et la branche est aussi réalisée. Pour simplifier les analyses, l’arc n’est pas pré-contraint avant le début de la traction sur la corde de tir. Les graphiques de cette modélisation sont fournis en FIG. 29. Une comparaison des réponses statiques force-allonge d’un arc recurve classique et d’un arc à appuis interne est faite en Annexe E et reproduite en FIG. 30. Tous les détails techniques du calcul éléments finis peuvent être retrouvés à partir du fichier entrée donné en Annexe A.

Bien que des calculs convergents aient pu être réalisés, et bien qu’une réduction de la pente de la courbe force-allonge soit obtenue avec l’arc à appuis internes par rapport à un arc recurve, l’effet de décharge recherché n’est pas obtenu. Il est difficile à ce stade de nos travaux de juger du réalisme des calculs par éléments finis réalisés. La complexité des analyses en jeu (non linéarités géométriques et contact cumulés) et le côté “boîte noire” d’un logiciel commercial tel qu’Abaqus ne nous permet pas de trancher.

## 4 Conclusions et continuations

Deux concepts d’arc à relâchement d’effort ont été proposés. Le premier, un arc à poulies internes, a été décrit et modélisé en statique. L’effet des principales caractéristiques de l’arc sur sa réponse a été étudié. Un dimensionnement laissant présager des performances comparables aux meilleurs arcs à poulies actuels a été réalisé par essais-erreurs. La réponse statique de cet arc répond au cahier des charges de la courbe objectif de la FIG. 1.

La seconde idée a été proposée, un arc à appuis interne. C’est, en l’état actuel de nos connaissances, une piste plus exploratoire.

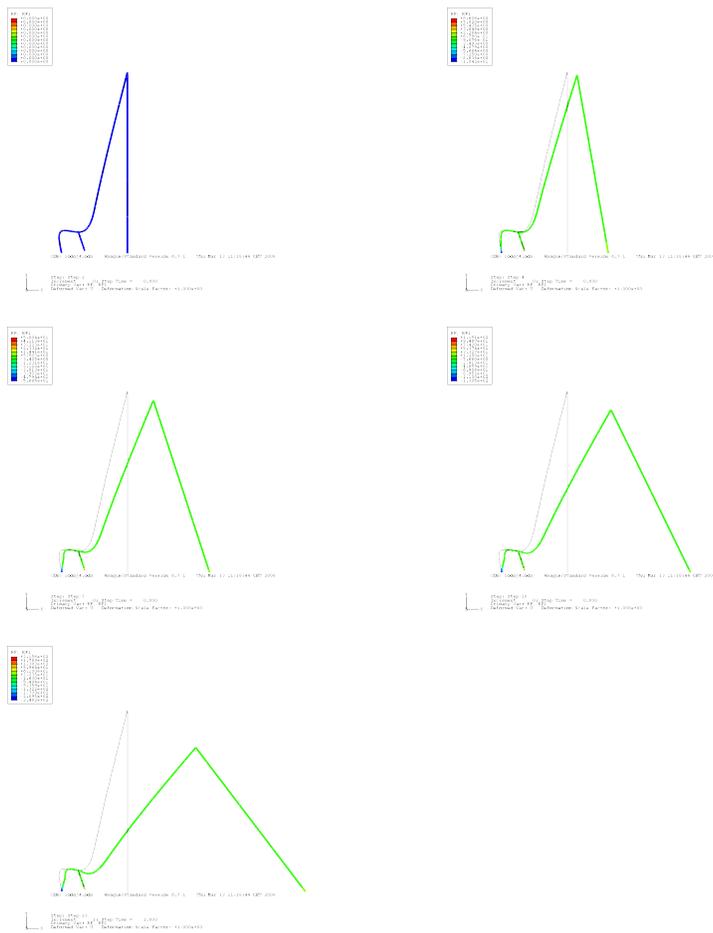


FIG. 29 – Modélisation de l'arc à appuis internes par éléments finis de poutres en grande déformation avec contact.

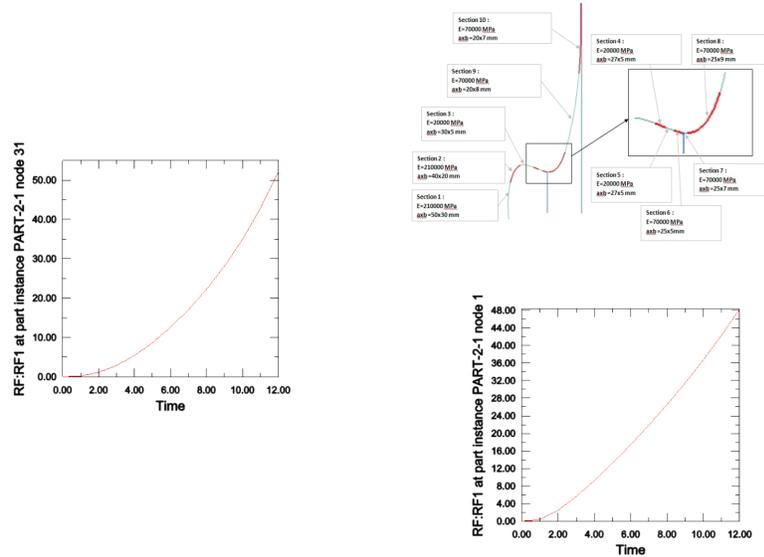


FIG. 30 – Réponses statiques d’un arc recurve (à gauche) et d’un arc à appuis internes (à droite), d’après Kroneisen et Lalandre, cf. Section E. Les forces sont en  $N$ , Time = 0 correspond à la position initiale de l’arc, Time = 12 à un déplacement de la corde de tir de  $0.65\text{ m}$ . On remarque une linéarisation de la réponse pour l’arc à appuis internes, alors que le recurve a une force croissant plus vite.

De nombreuses voies de recherche restent encore à explorer. En ce qui concerne l’arc à poulies internes, les continuations suivantes semblent pertinentes :

1. Etude complémentaire sur l’encombrement dans la poignée ; prise en compte de la taille du ressort de rappel, minimisation de l’encombrement, remplacement de la poulie de rappel par un ressort de torsion.
2. Au niveau de l’analyse statique, il faudrait remplacer le modèle rudimentaire de la branche par une poutre à section variable analysée en grands déplacements et faite d’un matériau élastique.
3. La conception approximative par essais-erreurs réalisée dans ce rapport pourrait être complétée par une véritable campagne d’optimisation. Une première difficulté connue est que les équations de l’arc tendent à devenir “raides” (très difficilement solubles). Il semble que les équations soient raides pour des réponses physiques irrégulières (brusques changements de tension dans la corde). Il suffirait alors d’éviter de tels comportements et leur analyse, numériquement coûteuse, pourrait être interrompue lors de l’optimisation.
4. L’analyse statique devrait être complétée par une analyse dynamique.
5. Un prototype reprenant les résultats de la Section 2.4, éventuellement complétée par les points précédents, devrait être fabriqué et testé.

La voie de l’arc à appuis internes est encore peu explorée. Il serait nécessaire de poursuivre les analyses statiques et, éventuellement en parallèle, de réaliser des tests rudimentaires sur de tels mécanismes de décharge. La question fondamentale à laquelle nous n’avons pas répondu est celle de la réciprocity de la courbe d’efforts. Est ce la même courbe qui est parcourue dans l’autre sens lors du trajet de réduction de l’allonge ? Si la réponse est positive, il faudra ensuite procéder aux étapes de dimensionnement statique, dynamique et à la construction de prototypes.

## Références

- [1] C. N. Hickman, F. Nagler, and P. E. Klopsteg, *Archery : the technical side*, National Field Archery Association, Redlands (Ca), 1947.
- [2] B. W. Kooi and J. A. Sparenberg, *On the static deformation of a bow*, Journal of Engineering Mathematics, vol. 14, pp. 27–45, 1980.
- [3] B. W. Kooi, *On the mechanics of the bow and arrow*, Journal of Engineering Mathematics, vol. 15, pp. 119–145, 1981.
- [4] B. W. Kooi, *On the Mechanics of the Bow and Arrow*, PhD thesis, Rijksuniversiteit Groningen, the Netherlands, 1983.
- [5] B. W. Kooi, *On the mechanics of the modern working-recurve bow*, Computational Mechanics, vol.8, pp. 291–304, 1991.
- [6] B. W. Kooi, *The design of the bow*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., vol. 97, no. 3, pp. 1–27, 1994.
- [7] B.W. Kooi and C.A. Bergman, *An Approach to the Study of Ancient Archery using Mathematical Modelling*, Antiquity, vol. 71, no. 271, pp. 124–134, 1997.
- [8] Oneida-Eagle bows company, <http://www.oneidaeaglesbow.com>.
- [9] témoignage (blog) sur <http://www.strictlybowhunting.com>.
- [10] Courbe sur <http://www.huntersfriend.com/shoutout/shoutoutR6.htm>.
- [11] Scilab, un logiciel libre de calcul scientifique, <http://www.scilab.org>.

## A Fichier input Abaqus de l'arc à appuis internes

L'essentiel du fichier entrée Abaqus (logiciel de calcul par éléments finis) est copié ci-dessous. Par économie de place, le maillage et les pas 3 à 12 (qui sont des évolutions logiques des autres pas) ont été tronqués.

```
*Heading
** Job name: rodoj4 Model name: Model-4
**Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
** PARTS
**
*Part, name=bow
*Node
1, -320., -360.
2, -328.912506, -310.878357

(...)

*Element, type=B21
1, 1, 9
2, 9, 2

(...)

*Nset, nset=PickedSet14, internal, generate
1, 84, 1
*Elset, elset=PickedSet14, internal, generate
1, 83, 1
*Nset, nset=PickedSet20, internal
1, 2, 9
*Elset, elset=PickedSet20, internal
1, 2
*Nset, nset=PickedSet21, internal, generate
1, 84, 1
*Elset, elset=PickedSet21, internal, generate
1, 83, 1
*Nset, nset=PickedSet27, internal
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18
19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 38, 39, 40
41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56
57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72
73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84
*Elset, elset=PickedSet27, internal
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18
19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41
42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57
58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73
74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83
*Nset, nset=PickedSet28, internal
3, 4, 32, 33, 34, 35, 36, 37
*Elset, elset=PickedSet28, internal, generate
26, 32, 1
*Nset, nset=PickedSet29, internal
1, 2, 9
*Elset, elset=PickedSet29, internal
1, 2
** Section: thinandsoft Profile: thinprofile
*Beam Section, elset=PickedSet29, material=reallysoft, temperature=GRADIENTS, section=RECT
25., 2.
0., 0., -1.
** Section: standardsec Profile: standardprofile
*Beam Section, elset=PickedSet27, material=bowmaterial, poisson = 0.3, temperature=GRADIENTS, section=RECT
25., 8.
0., 0., -1.
** Section: thinsec Profile: thinprofile
*Beam Section, elset=PickedSet28, material=bowmaterial, poisson = 0.3, temperature=GRADIENTS, section=RECT
25., 2.
0., 0., -1.
*End Part
**
**
*Part, name=string
*Node
1, -20., 300.
2, -20., 233.867554
3, -20., 167.735107
4, -20., 101.602661
5, -20., 35.4702148
6, -20., -30.6622314
7, -20., -96.7946777
8, -20., -162.927124
9, -20., -229.05957
10, -20., -295.192017
11, -20., -361.324463
*Element, type=B21
1, 1, 2
2, 2, 3
3, 3, 4
4, 4, 5
5, 5, 6
6, 6, 7
7, 7, 8
8, 8, 9
9, 9, 10
10, 10, 11
*Nset, nset=PickedSet2, internal, generate
1, 11, 1
*Elset, elset=PickedSet2, internal, generate
1, 10, 1
*Nset, nset=PickedSet4, internal, generate
1, 11, 1
*Elset, elset=PickedSet4, internal, generate
1, 10, 1
```

```

** Section: stringsec Profile: stringprofile
*Beam Section, elset=_PickedSet2, material=stringmat, poisson = 0.3, temperature=GRADIENTS, section=CIRC
3.
0.,0.,-1.
*End Part
**
**
*Part, name=support
*Node
1, -260., -340.
2, -264., -334.
3, -268., -328.
4, -272., -322.
5, -276., -316.
6, -280., -310.
7, -284., -304.
8, -288., -298.
9, -292., -292.
10, -296., -286.
11, -300., -280.
*Element, type=B21
1, 1, 2
2, 2, 3
3, 3, 4
4, 4, 5
5, 5, 6
6, 6, 7
7, 7, 8
8, 8, 9
9, 9, 10
10, 10, 11
*Nset, nset=_PickedSet2, internal, generate
1, 11, 1
*Elset, elset=_PickedSet2, internal, generate
1, 10, 1
*Nset, nset=_PickedSet4, internal, generate
1, 11, 1
*Elset, elset=_PickedSet4, internal, generate
1, 10, 1
** Section: supportsec Profile: supportprofile
*Beam Section, elset=_PickedSet2, material=supportmat, poisson = 0.3, temperature=GRADIENTS, section=CIRC
7.
0.,0.,-1.
*End Part
**
**
** ASSEMBLY
**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=bow-1, part=bow
*End Instance
**
*Instance, name=string-1, part=string
-59.9999997109375, 0., 0.
*End Instance
**
*Instance, name=support-1, part=support
103.332889842863, -90.7631274033922, 0.
103.332889842863, -90.7631274033922, 0., 103.332889842863, -90.7631274033922, -1.00000001918835, 14.9999985349176
*End Instance
**
*Nset, nset=_PickedSet12, internal, instance=bow-1
1,
*Nset, nset=_PickedSet13, internal, instance=support-1
1,
*Nset, nset=_PickedSet14, internal, instance=string-1
11,
*Nset, nset=_PickedSet17, internal, instance=bow-1
8,
*Nset, nset=_PickedSet18, internal, instance=string-1
1,
*Nset, nset=_PickedSet21, internal, instance=support-1
11,
*Elset, elset=_PickedSurf20_SNEG, internal, instance=bow-1, generate
3, 54, 1
*Surface, type=ELEMENT, name=_PickedSurf20, internal
_PickedSurf20_SNEG, SNEG
*Surface, type=NODE, name=_PickedSet21_CNS_, internal
_PickedSet21, 1.
*Surface, type=NODE, name=_PickedSet18_CNS_, internal
_PickedSet18, 1.
*Surface, type=NODE, name=_PickedSet17_CNS_, internal
_PickedSet17, 1.
** Constraint: Constraint-1
*Tie, name=Constraint-1, adjust=yes, position tolerance=1., no rotation
_PickedSet17_CNS_, _PickedSet18_CNS_
*End Assembly
**
** MATERIALS
**
*Material, name=bowmaterial
*Elastic
120000., 0.3
*Material, name=reallysoft
*Elastic
1000., 0.3
*Material, name=stringmat
*Elastic
300000., 0.3
*Material, name=supportmat
*Elastic
120000., 0.3
**
** INTERACTION PROPERTIES
**
*Surface Interaction, name=IntProp-1
1.,

```

```

*Friction
0.,
*Surface Behavior, pressure-overclosure=HARD
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: grip Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet12, 1, 1
_PickedSet12, 2, 2
_PickedSet12, 6, 6
** Name: support Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet13, 1, 1
_PickedSet13, 2, 2
_PickedSet13, 6, 6
**
** INTERACTIONS
**
** Interaction: Int-2
*Contact Pair, interaction=IntProp-1
_PickedSet21_CNS_, _PickedSurf20
** -----
**
** STEP: Step-1
**
*Step, name=Step-1, nlgeom=YES
*Static
1., 1., 1e-05, 1.
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: stringbc Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet14, 1, 1, 50.
_PickedSet14, 2, 2
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
** -----
**
** STEP: Step-2
**
*Step, name=Step-2, nlgeom=YES
*Static
1., 1., 1e-05, 1.
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: stringbc Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet14, 1, 1, 100.
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step

(...)

** -----
**
** STEP: Step-13
**
*Step, name=Step-13, nlgeom=YES
*Static
1., 1., 1e-05, 1.
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: stringbc Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet14, 1, 1, 650.
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step

```

Le problème de la pré-conception d'arcs à relâchement d'effort a donné lieu à une dizaine de projets d'étudiants entre 2005 et 2008 à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne. Quatre rapports parmi eux sont donnés en annexes ci-après car ils complètent certains points abordés dans le corps du rapport.

**B Arc à poulies internes : projet d'A. Yaya, N. Marouf et T.-H. Lee**

A consulter : la revue de brevets.

## **C Arc à poulies internes : projet de Y. Giacinti**

A consulter : la revue de brevets.

## **D Arc à appuis internes : projet d'O. Dubois et V. Lavillette**

Tout le document est d'intérêt. Il montre un premier effort de modélisation de cet arc par un modèle simplifié.

## **E Arc à appuis internes : projet de S. Kroneisen et D. Lalandre**

Ce rapport témoigne des efforts de modélisation de l'arc à appuis internes réalisés à travers l'utilisation d'un logiciel d'éléments finis (Abaqus).