

# Branch and Bound hybride pour un job-shop soumis à des contraintes de ressources humaines

ROADEF 2012 - Angers (France)

**O. Guyon**<sup>1,2</sup>, P. Lemaire<sup>3</sup>, E. Pinson<sup>2</sup> and D. Rivreau<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ecole des Mines de Saint-Etienne, Centre Microélectronique de Provence

<sup>2</sup> PRES LUNAM Université / LISA EA4094 CNRS / UCO

<sup>3</sup> Grenoble-INP / UJF-Grenoble 1 / CNRS, G-SCOP UMR5272

13/04/2012



# Plan

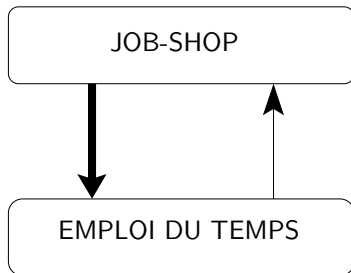
- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation MIP indexée sur le temps
  - Techniques de résolution
- 2 Branch and Bound 0-1
  - Principe directeur
  - Coupes initiales
  - Caractéristiques
- 3 Expérimentations - Conclusion
  - Expérimentations
  - Conclusion

# Plan

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation MIP indexée sur le temps
  - Techniques de résolution
- 2 Branch and Bound 0-1
  - Principe directeur
  - Coupes initiales
  - Caractéristiques
- 3 Expérimentations - Conclusion
  - Expérimentations
  - Conclusion

# Problème (1/3)

Obtenir un plan  
de production  
réalisable



Minimiser  
les coûts salariaux

# Problème (2/3) - Planification d'emploi du temps

## Horizon de planification

- $H = \delta \cdot \pi$  avec:
  - $\delta$  nombre de tranches horaires (shift)
  - $\pi$  durée de chaque tranche horaire

*NB:* cela permet, par exemple, de modéliser une organisation de travail en  $3 \times 8$

## Planification d'emploi du temps d'un ensemble $E$ de $\mu$ employés

- $A_e$  ensemble de machines que l'employé  $e$  maîtrise
- $\mathcal{T}_e$  ensemble de shifts où l'employé  $e$  est disponible

# Présentation du problème (3/3) - Job-Shop

Job-Shop : Ordonnancer un ensemble  $J$  de  $n$  jobs sur  $m$  machines

- $\forall j \in J \{O_{ji}\}_{i=1..m}$  séquence d'opérations du job  $j$ 
  - machine  $m_{ji} \in \{1 \dots m\}$
  - durée  $p_{ji}$ 
    - $\hookrightarrow$  Notation  $\rho_{jk}$ : durée d'exécution de  $j$  sur la machine  $k$
  - non interruptible
  - requiert un employé qualifié pour l'utilisation de  $m_{ji}$

Plan de production réalisable

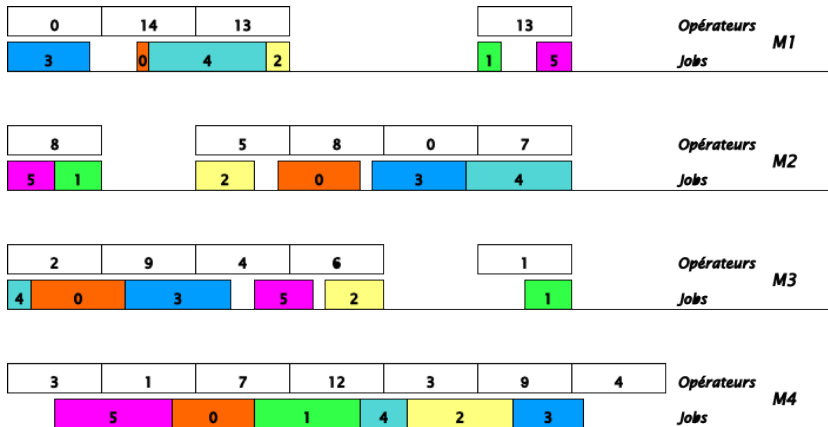
Un ordonnancement pour lequel toutes les opérations sont terminées avant un instant donnée  $C_{max} \leq H$ .

# Présentation du problème (3/3)

## Objectif

Affecter au **moindre coût** les employés à chaque couple (machine,shift) de produire un *plan de production réalisable*

## Exemple (6 jobs - 4 machines - 15 employés)





# Motivation : Prolongement d'un travail

## Prolongement d'un travail

- Guyon, Lemaire, Pinson and Rivreau.  
*European Journal of Operational Research (2010)*
- Couplage d'un problème de planification d'emploi du temps et d'ordonnancement de production
- *Méthode de résolution* :
  - ↪ Technique de décomposition et de génération de coupes
- ↔ Problème d'ordonnancement traité simple
- **Motivation** :
  - ↪ La décomposition et génération de coupes est-elle aussi efficace avec un problème d'ordonnancement + complexe (Job-Shop) ?

# Motivation : Problème traité dans la littérature

## Etude d'un cas traité dans la littérature

- Artigues, Gendreau, Rousseau et Vergnaud.  
*Computers and Operations Research (2009)* HyBB
- **Motivation** : Tester méthode hybride RO-PPC sur des problèmes couplant job-shop - planification d'agents
- *Méthode de résolution* :  
↪ Résolution via un solveur de PPC avec une contrainte globale additive correspondant à la relaxation continue du problème de planification d'agents
- *Notre étude* : cas spécifique de mapping activités - machines  
↪ 8 instances de comparaison

# Plan

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation MIP indexée sur le temps
  - Techniques de résolution
- 2 Branch and Bound 0-1
  - Principe directeur
  - Coupes initiales
  - Caractéristiques
- 3 Expérimentations - Conclusion
  - Expérimentations
  - Conclusion

# Modèle MIP (1/4)

## Variables de décision (binaires)

- $x_{eks} = 1$  ssi l'employé  $e$  est affecté au couple (machine  $k$ ; shift  $s$ )
- $y_{ikt} = 1$  ssi le job  $i$  est démarré sur la machine  $k$  à l'instant  $t$

## Modèle MIP (2/4)

## Fonction-objectif

$$[P] \quad \min \Theta = \sum_{e \in E} \sum_{k \in A_e} \sum_{s \in T_e} c_{eks} \cdot x_{eks}$$

## Planification d'emploi du temps : contraintes spécifiques

$$\begin{aligned} \sum_{k \notin A_e} \sum_{s=0}^{\sigma} x_{eks} &= 0 & e = 1, \dots, \mu \\ \sum_{k \in A_e} \sum_{s \notin T_e} x_{eks} &= 0 & e = 1, \dots, \mu \\ \sum_{k \in A_e} (x_{eks} + x_{ek(s+1)} + x_{ek(s+2)}) &\leq 1 & e = 1, \dots, \mu \quad s = 0, \dots, \sigma - 3 \\ x_{eks} &\in \{0, 1\} & e = 1, \dots, \mu \quad k = 1, \dots, m \\ & & s = 0, \dots, \sigma - 1 \end{aligned}$$

## Modèle MIP (3/4)

## Job-Shop : contraintes spécifiques

$$\sum_{t=0}^{d_{ik}-\rho_{ik}} t \cdot y_{ikt} + \rho_{ik} \leq C_{max}$$

$$i = 1, \dots, n \quad k = m_{im}$$

$$\sum_{t=r_{ik}}^{d_{ik}-\rho_{ik}} y_{ikt} = 1$$

$$i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, m$$

$$\sum_{t=0}^{r_{ik}} y_{ikt} + \sum_{t=d_{ik}-\rho_{ik}+1}^{C_{max}} y_{ikt} = 0$$

$$i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, m$$

$$\sum_{u=r_{ik}+\rho_{ik}}^t y_{ilu} - \sum_{u=r_{ik}}^{t-\rho_{ik}} y_{iku} \leq 0$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m-1$$

$$k = m_{ij} \quad l = m_{i(j+1)}$$

$$t = \rho_{ik} + p_{ik}, \dots, d_{il} - \rho_{il}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{u=\max(r_{ik}, t-\rho_{ik}+1)}^{\min(d_{ik}-\rho_{ik}, t)} y_{iku} \leq 1$$

$$k = 1, \dots, m \quad t = 0, \dots, C_{max}$$

$$y_{ikt} \in \{0, 1\}$$

$$i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, m$$

$$t = 0, \dots, C_{max}$$

## Modèle MIP (4/4)

## Contraintes couplantes

$$\sum_{e \in E} x_{eks} - \sum_{i=1}^n \sum_{u=\max(r_{ik}, t-\rho_{ik}+1)}^{\min(d_{ik}-\rho_{ik}, t)} y_{iku} \geq 0 \quad k = 1, \dots, m \quad t = 0, \dots, C_{\max}$$

$$s = \lfloor t/\pi \rfloor$$

# Plan

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation MIP indexée sur le temps
  - Techniques de résolution
- 2 Branch and Bound 0-1
  - Principe directeur
  - Coupes initiales
  - Caractéristiques
- 3 Expérimentations - Conclusion
  - Expérimentations
  - Conclusion



# Techniques de résolution

## Trois méthodes exactes

- MIP (MIP)
- Décomposition et génération de coupes de réalisabilité
- Branch and Bound 0-1 hybride sur le travail (ou non) en chaque couple (machine, shift) (HyBB)

## Une méthode approchée

- Glouton

# Plan

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation MIP indexée sur le temps
  - Techniques de résolution
- 2 Branch and Bound 0-1
  - Principe directeur
  - Coupes initiales
  - Caractéristiques
- 3 Expérimentations - Conclusion
  - Expérimentations
  - Conclusion

# Principe directeur

## Grandes lignes

- Décomposition de  $[P]$  (en relaxant les contraintes couplantes)
  - $[Job - Shop]$  (contraintes non couplantes liées aux  $y_{jkt}$ )
  - $[Employe]$  (contraintes non couplantes liées aux  $x_{eks}$ )
- Fixer une distribution  $\bar{z}$  de couples (machine, shift) travaillés ou non
- Vérifier la réalisabilité de  $\bar{z}$  à deux niveaux:
  - $[Job - Shop]$  via un solveur dédié efficace
  - $[Employe]$  via un solveur de PLNE
- Pour éviter exploration exhaustive :
  - ↪  $\bar{z}$  est généré via un Branch and Bound 0-1 couplé à une génération de coupes
    - initiales
    - de réalisabilité (générées en cours d'exploration)

# Plan

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation MIP indexée sur le temps
  - Techniques de résolution
- 2 Branch and Bound 0-1
  - Principe directeur
  - **Coupes initiales**
  - Caractéristiques
- 3 Expérimentations - Conclusion
  - Expérimentations
  - Conclusion

# Coupes initiales de probing

## Quoi ?

Tester obligation de travail pour tout couple (machine  $k$ , shift  $s$ )

## Comment ?

- créer un job fictif  $j_f$  qui peut être exécuté sur  $k$  durant  $s$  pour une durée de  $\pi$
- résoudre [Job – Shop] avec un solveur de Job-Shop dédié
- Si [Job – Shop] est irréalisable ( $\Leftrightarrow$  ne respecte pas  $C_{max}$ ) :
  - $j_f$  ( $\rightarrow$  absence de ressource sur  $(k, s)$ ) non ordonnançable
  - Un employé travaillera sur  $(k, s)$  dans toute solution optimale

## Résultat

- sous-ensemble de couples  $(k, s)$  **figés au travail**
- coupes sur [Employee]  $\Rightarrow \sum_{e=1}^{\mu} x_{eks} = 1 \quad \forall (k, s)$  figé au travail

# Coupes initiales de capacité

## Quoi ?

Pour chaque machine  $k$ , déterminer une borne inférieure  $LB_k$  du nombre minimal de shifts travaillés

## Comment ? $LB_k$ est le maximum de 3 bornes inférieures valides

- 1 directe : nombre de couples  $(k, s)$  figés par le probing sur  $k$
- 2 directe :  $\left\lceil \frac{\sum_{j=1}^n \rho_{jk}}{\pi} \right\rceil$
- 3 indirecte : Test (par probing) du nombre maximal valide de jobs fictifs

## Résultat : Coupes pour $[Employee]$

$$\sum_{e=1}^{\mu} \sum_{s \in \mathcal{T}_e} x_{eks} \geq LB_k \quad k = 1, \dots, m$$

## Coupes de non surcouverture

Coupes de non surcouverture pour chaque couple  $(k, s)$

S'assurer que chaque plan de production réalisable a au plus un employé affecté à  $(k, s)$

Résultat : Coupes pour  $[Employee]$

$$\sum_{e \in E | (k \in A_e) \wedge (s \in T_e)} x_{eks} \leq 1 \quad k = 1, \dots, m \quad s = 0, \dots, \delta - 1$$

# Plan

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation MIP indexée sur le temps
  - Techniques de résolution
- 2 Branch and Bound 0-1
  - Principe directeur
  - Coupes initiales
  - Caractéristiques
- 3 Expérimentations - Conclusion
  - Expérimentations
  - Conclusion



# Caractéristiques (1/4)

## Schéma de séparation binaire

- gauche: imposer un couple donné  $(\bar{k}, \bar{s})$  à **ne pas** être travaillé
- droit: imposer le même couple  $(\bar{k}, \bar{s})$  à être travaillé

## Stratégie d'exploration

Profondeur d'abord

## Choix de la variable de branchement (machine $\bar{k}$ , shift $\bar{s}$ )

- $\bar{k}$  : machine dont l'écart entre le nombre de shifts figés au travail (ou pouvant être travaillés) et  $LB_k$  est maximal
- $\bar{s}$  : shift le *plus tard* tel que  $(\bar{k}, \bar{s})$  est non figé

## Caractéristiques (2/4)

### Définitions

- *Distribution relaxée* (moins contraignante)  
Distribution de couples  $(k, s)$  tels que chaque  $(k, s)$  figé (par arborescence ou probing) est fixé à sa valeur et tous les autres sont **libres**
- *Distribution stricte* (plus contraignante)  
Distribution de couples  $(k, s)$  tels que chaque  $(k, s)$  figé (par arborescence ou probing) est fixé à sa valeur et tous les autres sont fixés à ne pas être travaillés

### Evaluation

Relaxation continue de  $[Employee]$  pour la *distribution relaxée*

## Caractéristiques (3/4)

### Règles d'implication

Si la décision est: *le couple  $(\bar{k}, \bar{s})$  ne doit pas être travaillé*

On tente de fixer chaque couple (machine, shift) en:

- utilisant les techniques de probing pour chaque couple  $(\bar{k}, s)$  non figé
- vérifier le respect de la borne inférieure  $LB_{\bar{k}}$  du nombre minimal de shifts travaillés sur  $\bar{k}$

### Règles d'élimination

Un nœud peut être élagué si l'une de ceux conditions est satisfaite:

- 1 [Employee] avec *distribution relaxée* est irréalisable ou de coût supérieur à la meilleure solution connue
- 2 *Distribution relaxée* irréalisable pour [Job – Shop]

## Caractéristiques (4/4)

### Si le nœud courant n'a pas été élagué

- On cherche l'optimum  $(\bar{x}^*, \bar{\theta}^*)$  de  $[Employee]$  qui respecte *distribution stricte*
  - Si  $\bar{x}^*$  existe, on vérifie si la *distribution stricte* est réalisable sur  $[Job - Shop]$ 
    - Si oui,  $UB$  est mise à jour:  $UB \leftarrow \bar{\theta}^*$
- Si  $UB$  n'a pas été mise à jour: on ajoute une coupe de réalisabilité à  $[Employee]$

### Coupe de réalisabilité pour $[Employee]$

- interdire les solutions équivalentes à  $\bar{x}^*$
- forcer le travail sur au moins un couple  $(k, s)$  non travaillé dans la *distribution stricte*
- Coupe :  $\sum_{(k,s) \text{ non figé}} \sum_{e=1}^{\mu} x_{eks} \geq 1$

# Plan

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation MIP indexée sur le temps
  - Techniques de résolution
- 2 Branch and Bound 0-1
  - Principe directeur
  - Coupes initiales
  - Caractéristiques
- 3 Expérimentations - Conclusion
  - Expérimentations
  - Conclusion

## Jeu de données : 300 instances générées selon [AGRV09]

## Instances réalisables

$ejsn \times m \times \mu$	$\mu_{extra} (C E)$	$\pi$	$C_{max}$	$\Theta^*$	Temps limite
$ejs6 \times 4 \times 25_{rea}$	10	8	$\in [37, 56]$	$\in [17, 33]$	300s
$ejs6 \times 6 \times 25_{rea}$	10	10	$\in [48, 70]$	$\in [24, 73]$	300s
$ejs8 \times 8 \times 40_{rea}$	20	8	$\in [44, 64]$	$\in [70, 106]$	600s
$ejs8 \times 8 \times 50_{rea}$	20	10	$\in [60, 80]$	$\in [40, 64]$	600s
$ejs10 \times 10 \times 40_{rea}$	20	8	$\in [72, 80]$	$\in [174, 286]$	600s
$ejs10 \times 10 \times 50_{rea}$	20	10	$\in [80, 100]$	$\in [81, 133]$	600s

## Instances irréalisables

$ejsn \times m \times \mu$	$\mu_{extra} (C E)$	$\pi$	$C_{max}$	$\Theta^*$	Temps limite
$ejs6 \times 4 \times 25_{irr}$	21	8	$\in [40, 56]$	$\in [8009, 12013]$	300s
$ejs6 \times 6 \times 25_{irr}$	19	10	$\in [50, 70]$	$\in [8028, 18015]$	300s
$ejs8 \times 8 \times 40_{irr}$	32	8	$\in [64, 64]$	$\in [22040, 32034]$	600s
$ejs8 \times 8 \times 50_{irr}$	42	10	$\in [60, 90]$	$\in [19040, 28031]$	600s
$ejs10 \times 10 \times 40_{irr}$	30	8	$\in [72, 80]$	$\in [39056, 50055]$	600s
$ejs10 \times 10 \times 50_{irr}$	40	10	$\in [80, 100]$	$\in [35056, 47068]$	600s

# Résultats : coupes initiales

## Ensemble des instances

	<i>LP</i>		<i>LP avec coupes initiales</i>				
	<i>LP/Θ*</i>	temps	<i>LP/Θ*</i>	initiales	temps préprocess	temps LP	temps total
ejs6 × 4 × 25	83.3%	0.3s	98.1%	48.3	0.2s	0.2s	0.4s
ejs6 × 6 × 25	66.9%	1.0s	87.8%	69.3	1.1s	1.0s	2.1s
ejs8 × 8 × 40	65.8%	4.4s	87.7%	127.8	5.7s	3.9s	9.6s
ejs8 × 8 × 50	70.3%	8.7s	85.9%	123.4	10.3s	9.9s	20.2s
ejs10 × 10 × 40	62.4%	21.5s	82.3%	211.6	49.1s	22.3s	71.4s
ejs10 × 10 × 50	61.9%	44.4s	70.6%	194.5	74.7s	52.3s	127.0s
Total	68.4%	13.4s	85.4%	129.1	23.5s	14.9s	38.4s

# Résultats : méthodes exactes

## Instances réalisables

	HyBB			MIP			AGRV09		
	succès	temps	gap	succès	temps	gap	succès	temps	gap
ejs6 × 4 × 25 <sub>rea</sub>	100%	1s	0%	100%	1s	0%	88%	53s	1%
ejs6 × 6 × 25 <sub>rea</sub>	76%	86s	0%	84%	65s	0%	44%	182s	31%
ejs8 × 8 × 40 <sub>rea</sub>	68%	234s	4%	68%	264s	2%	32%	478s	47%
ejs8 × 8 × 50 <sub>rea</sub>	24%	461s	5%	28%	454s	2%	8%	568s	45%
ejs10 × 10 × 40 <sub>rea</sub>	16%	529s	8%	20%	525s	43%	0%	601s	51%
ejs10 × 10 × 50 <sub>rea</sub>	8%	571s	6%	0%	594s	92%	0%	601s	73%
Total	49%	314s	4%	50%	317s	23%	29%	414s	41%

## Instances irréalisables

	HyBB			MIP			AGRV09		
	succès	temps	gap	succès	temps	gap	succès	temps	gap
ejs6 × 4 × 25 <sub>irr</sub>	100%	3s	0%	100%	4s	0%	0%	298s	26%
ejs6 × 6 × 25 <sub>irr</sub>	72%	115s	2%	68%	131s	1%	0%	299s	42%
ejs8 × 8 × 40 <sub>irr</sub>	36%	436s	4%	52%	367s	1%	0%	600s	31%
ejs8 × 8 × 50 <sub>irr</sub>	32%	432s	9%	28%	463s	18%	0%	600s	34%
ejs10 × 10 × 40 <sub>irr</sub>	20%	493s	2%	12%	543s	57%	0%	601s	25%
ejs10 × 10 × 50 <sub>irr</sub>	0%	601s	2%	0%	600s	96%	0%	601s	33%
Total	43%	347s	3%	43%	351s	29%	0%	500s	32%



# Résultats : méthodes exactes, HyBB vs MIP

## Instances réalisables

	succès	HyBB		MIP	
		time(S)	gap(F)	time(S)	gap(F)
ejs6 × 4 × 25 <sub>rea</sub>	25/25	1s	-	2s	-
ejs6 × 6 × 25 <sub>rea</sub>	19/25	19s	2%	12s	2%
ejs8 × 8 × 40 <sub>rea</sub>	15/25	39s	10%	89s	4%
ejs8 × 8 × 50 <sub>rea</sub>	6/25	22s	6%	92s	3%
ejs10 × 10 × 40 <sub>rea</sub>	4/25	195s	9%	478s	51%
ejs10 × 10 × 50 <sub>rea</sub>	0/25	-	6%	-	92%
Total	69/150	27s	6%	47s	43%

## Instances irréalisables

	succès	HyBB		MIP	
		time(S)	gap(F)	time(S)	gap(F)
ejs6 × 4 × 25 <sub>irr</sub>	25/25	3s	-	4s	-
ejs6 × 6 × 25 <sub>irr</sub>	17/25	40s	7%	52s	4%
ejs8 × 8 × 40 <sub>irr</sub>	9/25	143s	6%	95s	1%
ejs8 × 8 × 50 <sub>irr</sub>	7/25	61s	12%	111s	25%
ejs10 × 10 × 40 <sub>irr</sub>	3/25	36s	2%	127s	64%
ejs10 × 10 × 50 <sub>irr</sub>	0/25	-	2%	-	96%
Total	61/150	42s	5%	49s	48%

# Plan

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation MIP indexée sur le temps
  - Techniques de résolution
- 2 Branch and Bound 0-1
  - Principe directeur
  - Coupes initiales
  - Caractéristiques
- 3 Expérimentations - Conclusion
  - Expérimentations
  - Conclusion

# Conclusion

## Remarques

- Coupes initiales fortes (notamment les coupes de probing)
- Approche pas décomposition intéressante
- Branch and Bound 0-1 compétitif

## Pour plus de détail...

Guyon, Lemaire, Pinson and Rivreau. *Solving an integrated job-shop problem with human resource constraints*. *Annals of Operations Research* (2012) DOI: [10.1007/s10479-012-1132-3](https://doi.org/10.1007/s10479-012-1132-3)