Estimation des variations géométriques de grains anisotropes dans un modèle booléen.

Saïd Rahmani, J-C Pinoli, Johan Debayle

ESTIMATION DES VARIATIONS GÉOMÉTRIQUES DE GRAINS ANISOTROPES DANS UN MODÈLE BOOLÉEN.

S.Rahmani, J-C.Pinoli & J.Debayle.
said.rahmani@emse.fr, pinoli@emse.fr, debayle@emse.fr.

Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint Étienne
SPIN/LGF, UMR CNRS 5307.

Mots clé : Covariogramme géométrique, géométrie stochastique, granulométrie, modèle booléen, morphologie.

La géométrie stochastique a pour objet l'étude de modèles spatiaux aléatoires dans l'espace euclidien. De nombreux matériaux peuvent être modélisés par des ensembles aléatoires. En effet l'hétérogénéité des matériaux peut être appréhendée par une approche probabiliste [1], particulièrement les milieux granulaires et fibreux. La compréhension des mécanismes d'agrégation de particules revêt une grande importance dans de nombreux domaines d'application. Plus particulièrement, les processus de cristallisation de particules solides en suspension dans un milieu liquide (Figure 1) sont une des préoccupations du LGF(UMR CNRS 5307), l'objectif étant de caractériser les particules en terme de taille, de forme et de répartition spatiale.
Ces structures peuvent être naturellement représentées par des réunions de particules aléatoires (les grains) centrées sur des positions aléatoires (les germes), connue sous le nom de modèle germes-grains [2] :

$$\Xi = \bigcup_{x_i \in \Phi} \Xi_i + x_i \tag{1}$$

où Φ est processus ponctuel [2] qui génère les germes x_i et où les Ξ_i sont des ensembles aléatoires convexes iid appelés les grains.

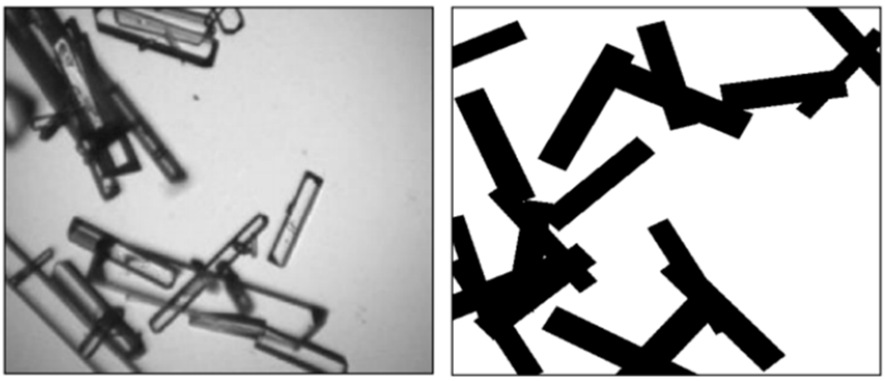

FIGURE 1 – Image d'une population de cristaux d'oxalate d'ammonium à gauche et un modèle géométrique à droite.

Notre approche consiste à représenter la population de cristaux par un tel modèle. C'est-à-dire que le processus Φ correspond à la répartition des particules et les Ξ_i aux particules elles-mêmes. L'objectif est d'ajuster le modèle aux données réelles à partir de mesures accessibles via un système d'acquisition d'images. En général l'acquisition est réalisée par imagerie optique, c'est-à-dire que nous disposons de réalisations de $\Xi \cap W$ où W est une fenêtre bornée et que nous voulons estimer les caractéristiques de Φ et Ξ_0. Pour répondre à cet objectif, on s'attache à deux points : premièrement, estimer les caractéristiques de Ξ à partir de réalisation de $\Xi \cap W$ [3] et deuxièmement, établir des relations entre les caractéristiques de Ξ et celle de Φ et Ξ_0. Ce deuxième point pose le problème de la non-unicité de la représentation (1). Pour y remédier on introduit une hypothèse supplémentaire : on suppose le processus Φ de type connue (processus de Poisson, de cox,..). Nous utiliserons le modèle Booléen homogène, c'est-à-dire un modèle germe-grain dans lequel Φ est un processus de Poissons homogène. Ce modèle est très utilisé car nous disposons d'une formule analytique pour la Capacité de Choquet.

Plusieurs méthodes permettent de relier les caractéristiques globales du modèle aux caractéristiques du grain primaire. Dans le plan et l'espace, les formules de Miles [4] ou la méthode du contraste minimum [5] permettent d'estimer la valeur moyenne des fonctionnelles de Minkowski du grain primaire. En général le grain primaire est supposé d'une forme connue et déterministe, c'est-à-dire que les réalisations du grain primaire sont homothétiques. De sorte à pouvoir estimer les variations du facteur d'homothétie à partir de l'espérance des fonctionnelles de Minkowski. Par exemple, pour un disque dans le plan, les moments du premier et second ordre du rayon du grain primaire sont respectivement proportionnels à son périmètre moyen et à son aire moyenne. Cependant, si l'on considère que la forme du grain peut varier plusieurs problèmes restent en suspens : d'une part les fonctionnelles de Minkowski d'un convexe ne suffisent pas à caractériser sa forme et d'autre part leurs moyennes ne fournissent a priori, aucune information sur la variation du grain. Par exemple, pour un modèle booléen dont le grain a une forme qui dépend de plusieurs paramètre(rectangle, ellipse...), l'estimation des variations géométriques du grain n'est pas directe.

L'objectif de nos travaux est donc de caractériser et d'estimer les variations du grain primaire du modèle booléen sans aucune hypothèse sur sa forme, à partir de sa réalisation dans une fenêtre bornée. Soit Ξ un modèle booléen stationnaire du plan, de grain primaire Ξ_0 et $(rK)_{r\in[0,R]},\ R>0$ une famille de convexes compacts homothétiques du plan. Remarquons que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ le dilaté $\Xi \oplus rK$ est un modèle booléen de même intensité que Ξ et de grain primaire $\Xi_0 \oplus rK$. Nous montrerons qu'à partir des covariogrammes géométriques moyens [6] des modèles dilatés, il est possible d'estimer la structure du second ordre de ${}^t(A(\Xi_0), W(\Xi_0, K))$, où W désigne l'aire mixte. De plus, du choix de K découle des estimateurs de différents paramètres morphologiques : avec une boule on obtient des estimateurs pour le couple (aire, périmètre) et avec un segment des estimateurs pour le couple (aire, diamètre de Féret). Nous évaluerons la performance de nos estimateurs sur un modèle booléen à grains rectangulaires.

Références

[1] D. Jeulin. Random texture models for material structures. *Statistics and Computing*, 10(2) :121–132, 2000.

[2] S.N Chiu, D. Stoyan, W.S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley & Sons, 2013.

[3] I. S. Molchanov. *Statistics of the Boolean model for practitioners and mathematicians*. Wiley Chichester, 1997.

[4] R.E. Miles. Estimating aggregate and overall characteristics from thick sections by transmission microscopy. *Journal of Microscopy*, 107(3) :227–233, 1976.

[5] D. Stoyan. *Stochastic Geometry and its application*. John Wiley & Sons, 1987.

[6] B. Galerne. Computation of the perimeter of measurable sets via their covariogram. applications to random sets. *Image Analysis and Stereology*, 30(1) :39–51, 2011.