THÈSE

Exemplaire Unique

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR D'ÉTAT ES-SCIENCES

par

SKALLI HOUSSEYNI Abdelali

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA DEFORMATION PLASTIQUE EN COMPRESSION PLANE DE CRISTAUX D'ALUMINIUM

Soutenue à Saint-Etienne le 23 Juin 1984 devant la Commission d'Examen

JURY

M.	P. GUYOT	Président
MM.	B. BAUDELET A. ZAOUI	Rapporteurs
MM.	J.H. DRIVER C. GOUX M. WINTENBERGER	Examinateurs

PL 809 A.1.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE

DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR D'ÉTAT ES-SCIENCES

par

SKALLI HOUSSEYNI Abdelali

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA DEFORMATION PLASTIQUE EN COMPRESSION PLANE DE CRISTAUX D'ALUMINIUM

Soutenue à Saint-Etienne le 23 Juin 1984 devant la Commission d'Examen

B.R.I.S.E E.M.S.E
3 4200 00724091 0

JURY

M.	P. GUYOT	Président
MM.	B. BAUDELET A. ZAOUI	Rapporteurs
MM.	J.H. DRIVER C. GOUX M. WINTENBERGER	Examinateurs

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président : Daniel BLOCH

Vice-Présidents : René CARRE
Hervé CHERADAME
Marcel IVANES

Année universitaire 1982-1983

Professeurs des Universités

ANCEAU	François	E.N.S.I.M.A.G.	LACOUME	Jean Louis	E.N.S.I.E.G.
BARRAUD	Alain	E.N.S.I.E.G.	LATOMBE	Jean Claude	E.N.S.I.M.A.G.
BAUDELET	Bernard	E.N.S.I.E.G.	LESIEUR	Marcel	E.N.S.H.G.
BESSON	Jean	E.N.S.E.E.G.	LESPINARD	Georges	E.N.S.H.G.
BLIMAN	Samuel	E.N.S.E.R.G.	LONGEQUEUE	Jean Pierre	E.N.S.I.E.G.
BLOCH	Daniel	E.N.S.I.E.G.	MAZARE	Guy	E.N.S.I.M.A.G.
BOIS	Philippe	E.N.S.H.G.	MOREAU	René	E.N.S.H.G.
BONNETAIN	Lucien	E.N.S.E.E.G.	MORET	Roger	E.N.S.I.E.G.
BONNIER	Etienne	E.N.S.E.E.G.	MOSSIERE	Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
BOUVARD	Maurice	E.N.S.H.G.	PARIAUD	Jean Charles	E.N.S.E.E.G.
BRISSONNEAU	Pierre	E.N.S.I.E.G.	PAUTHENET	René	E.N.S.I.E.G.
BUYLE BODIN	Maurice	E.N.S.E.R.G.	PERRET	René	E.N.S.I.E.G.
CAVAIGNAC	Jean François	E.N.S.I.E.G.	PERRET	Robert	E.N.S.I.E.G.
CHARTIER	Germain	E.N.S.I.E.G.	PIAU	Jean Michel	E.N.S.H.G.
CHENEVIER	Pierre	E.N.S.E.R.G.	POLOUJADOFF	Michel	E.N.S.I.E.G.
CHERADAME	Hervé	U.E.R.M.C.P.P.	POUPOT	Christian	E.N.S.E.R.G.
CHERUY	Arlette	E.N.S.I.E.G.	RAMEAU	Jean Jacques	E.N.S.E.E.G.
CHIAVERINA	Jean	U.E.R.M.C.P.P.	RENAUD	Maurice	U.E.R.M.C.P.P.
COHEN	Joseph	E.N.S.E.R.G.	ROBERT	André	U.E.R.M.C.P.P.
COUMES	André	E.N.S.E.R.G.	ROBERT	François	E.N.S.I.M.A.G.
DURAND	Francis	E.N.S.E.E.G.	SABONNADIERE	Jean Claude	E.N.S.I.E.G.
DURAND	Jean Louis	E.N.S.I.E.G.	SAUCIER	Gabrielle	E.N.S.I.M.A.G.
FELICI	Noël	E.N.S.I.E.G.	SCHLENKER	Claire	E.N.S.I.E.G.
FOULARD	Claude	E.N.S.I.E.G.	SCHLENKER	Michel	E.N.S.I.E.G.
GENTIL	Pierre	E.N.S.E.R.G.	SERMET	Pierre	E.N.S.E.R.G.
GUERIN	Bernard	E.N.S.E.R.G.	SILVY	Jacques	U.E.R.M.C.P.P.
GUYOT	Pierre	E.N.S.E.E.G.	SOHM	Jean Claude	E.N.S.E.E.G.
IVANES	Marcel	E.N.S.I.E.G.	SOUQUET	Jean Louis	E.N.S.E.E.G.
JAUSSAUD	Pierre	E.N.S.I.E.G.	VEILLON	Gérard	E.N.S.I.M.A.G.
JOUBERT	Jean Claude	E.N.S.I.E.G.	ZADWORNY	François	E.N.S.E.R.G.
JOURDAIN	Geneviève	E.N.S.I.E.G.			

Professeurs associés

BASTIN	Georges	E.N.S.H.G.	GANDINI	Alessandro	U.E.R.M.C.P.P.
BERRIL	John	E.N.S.H.G.	HAYASHI	Hirashi	E.N.S.I.E.G.
CARREAU	Pierre	E.N.S.H.G.			

Professeurs Université des Sciences Sociales (Grenoble II)

BOLLIET	Louis	CHATELIN	Françoise

Professeurs E.N.S. Mines de Saint Etienne

RIEU	Jean	SOUSTELLE	Michel

Chercheurs du C.N.R.S.

FRUCHART	Robert	Directeur de recherche	HOPFINGER	Emil	Maître de recherche
VACHAUD	Georges	Directeur de Recherche	JOUD	Jean Charles	Maître de recherche
ALLIBERT	Michel	Maître de recherche	KAMARINOS	Georges	Maître de recherche
ANSARA	Ibrahim	Maître de Recherche	KLEITZ	Michel	Maître de recherche
ARMAND	Michel	Maître de recherche	LANDAU	Ioan-Dore	Maître de recherche
BINDER	Gilbert		LASJAUNIAS	J.C.	
CARRE	René	Maître de recherche	MERMET	Jean	Maître de recherche
DAVID	René	Maître de recherche	MUNIER	Jacques	Maître de recherche
DEPORTES	Jacques		PIAU	Monique	
DRIOLE	Jean	Maître de recherche	PORTESEIL	Jean Louis	
GIGNOUX	Damien		THOLENCE	Jean Louis	
GIVORD	Dominique		VERDILLON	André	
GUELIN	Pierre				

Chercheurs du Ministère de la Recherche et de la Technologie
(Directeurs et Maîtres de recherche - E.N.S. Mines de Saint Etienne)

LESBATS	Pierre	Directeur de recherche	LALAUZE	René	Maître de recherche
BISCONDI	Michel	Maître de recherche	LANCELOT	Francis	Maître de recherche
KOBYLANSKI	André	Maître de recherche	THEVENOT	François	Maître de recherche
LE COZE	Jean	Maître de recherche	TRAN MINH	Canh	Maître de recherche

.../...

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche
(Décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

ALLIBERT	Colette	DIARD	Jean Paul	NGUYEN TRUONG	Bernadette
BERNARD	Claude	EUSTATOPOULOS	Nicolas	RAVAINE	Denis
BONNET	Roland	FOSTER	Panayotis	SAINFORT	(CENG)
CAILLET	Marcel	GALERIE	Alain	SARRAZIN	Pierre
CHATILLON	Catherine	HAMMOU	Abdelkader	SIMON	Jean Paul
CHATILLON	Christian	MALMEJAC	Yves (CENG)	TOUZAIN	Philippe
COULON	Michel	MARTIN GARIN	Régina	URBAIN	Georges (Laboratoire des ultraréfractaires ODEILLO)

E.N.S.Mines Saint Etienne

GUILHOT	Bernard	THOMAS	Gérard	DRIVER	Julien

E.N.S.E.R.G.

BARIBAUD	Michel	CHEHIKIAN	Alain	HERAULT	Jeanny
BOREL	Joseph	DOLMAZON	Jean Marc	MONLLOR	Christian
CHOVET	Alain				

E.N.S.I.E.G.

BORNARD	Guy	KOFMAN	Walter	MAZUER	Jean
DESCHIZEAUX	Pierre	LEJEUNE	Gérard	PERARD	Jacques
GLANGEAUD	François			REINISCH	Raymond

E.N.S.H.G.

ALEMANY	Antoine	MICHEL	Jean Marie	ROWE	Alain
BOIS	Daniel	OBLED	Charles	VAUCLIN	Michel
DARVE	Félix			WACK	Bernard

E.N.S.I.M.A.G.

BERT	Didier	COURTOIS	Bernard	FONLUPT	Jean
CALMET	Jacques	DELLA DORA	Jean	SIFAKIS	Joseph
COURTIN	Jacques				

U.E.R.M.C.P.P.

CHARUEL	Robert

C.E.N.G.

CADET	Jean	JOUVE	Hubert (LETI)	PERROUD	Paul
COEURE	Philippe (LETI)	NICOLAU	Yvan (LETI)	PEUZIN	Jean Claude (LETI)
DELHAYE	Jean Marc (STT)	NIFENECKER	Hervé	TAIEB	Maurice
DUPUY	Michel (LETI)			VINCENDON	Marc

Laboratoires extérieurs :

C.N.E.T.

DEMOULIN	Eric	GERBER	Roland	MERCKEL	Gérard
DEVINE	R.A.B.			PAULEAU	Yves

I.N.S.A. Lyon

GAUBERT	C.

****

A ma femme,

A ma fille Saraa,

A mes parents.

R E M E R C I E M E N T S

=+=+=+

TABLE DES MATIERES

Pages

NOMENCLATURE 1

CHAPITRE I :

RAPPEL DES THEORIES DE LA DEFORMATION PLASTIQUE DE CRISTAUX

I.1 - Introduction 5

I.2 - Déformation plastique sous conditions de contraintes imposées (Modèle de SACHS) 7

I.3 - Conditions de déformations imposées 11

I.3.1 - Modèle de TAYLOR 11

I.3.2 - Modèle de BISHOP et HILL 15

I.4 - Applications des modèles de TAYLOR, BISHOP et HILL . 15

I.5 - Conditions de contraintes et déformations imposées : conditions mixtes 21

I.5.1 - Modèle de RENOUARD et WINTENBERGER 21

I.6 - Problèmes actuels 25

I.7 - Prise en compte des énergies de déformation plastique de 2ème ordre 27

Pages

CHAPITRE II :

TECHNIQUES EXPERIMENTALES ET METHODES DE CALCUL

II.1 - Dispositif de compression plane 35

II.1.1 - Introduction 35

II.1.2 - Dispositif de compression plane utilisé 39

II.1.3 - Conditions limites des différents essais 39

II.2 - Préparation des éprouvettes 45

II.2.1 - Elaboration des monocristaux et de tricristaux orientés d'aluminium 47

II.2.2 - Préparation des éprouvettes 47

II.3 - Réalisation de l'essai de compression plane 49

II.3.1 - Problème des frottements échantillon-matrice . 49

II.3.2 - Conduite de l'essai sur cristaux 49

II.3.3 - Observation des plans de glissement 53

II.3.4 - Mesure des orientations cristallines 53

II.4 - Méthodes de calcul 55

II.4.1 - Déformation complètement imposée 55

II.4.1.1 - Application de la méthode de BISHOP et HILL à la compression plane pure 55

II.4.1.2 - Calcul de minimisation de dT 59

II.4.2 - Déformations partiellement imposées 63

II.4.2.1 - Calcul de l'état de contrainte 63

II.4.2.2 - Déformations non imposées e^*_{12} *et* e^*_{23} *et la rotation cristalline* 69

II.4.2.3 - Organigramme du calcul 71

Pages

CHAPITRE III :

RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX EN COMPRESSION PLANE

III.1 - Compression plane partiellement imposées 81

III.1.1 - Choix des orientations 81

III.1.2 - Orientations de haute symétrie 81

III.1.2.1 - Orientations (110) [u v w] 81

III.1.2.2 - Orientations (001) [u v w] 101

III.1.3 - Orientations de faible symétrie 113

III.1.4 - Monocristaux d'un acier inoxydable austénitique 133

III.1.5 - Discussion et conclusions 137

III.2 - Compression plane complètement imposée 143

III.2.1 - Choix des orientations 143

III.2.2 - Orientations "stables" 145

III.2.3 - Orientations instables 155

III.2.4 - Discussion et conclusions 167

CHAPITRE IV :

ETUDE DES ROTATIONS CRISTALLINES LORS DU LAMINAGE D'UNE TÔLE D'ALUMINIUM A GROS GRAINS

IV.1 - Introduction 175

IV.2 - Calculs théoriques 177

IV.3 - Technique expérimentale 183

Pages

IV.4 - Résultats expérimentaux 183

IV.5 - Discussion 201

CHAPITRE V :

DISCUSSION ET CONCLUSIONS 209

BIBLIOGRAPHIE 225

ANNEXES 231

NOMENCLATURE

$\delta\varepsilon_{ij}$ = incrément de déformation plastique quelconque.

δe^{*}_{ij} = incrément de déformation plastique non-imposée.

$\delta\overline{e_{ij}}$ = incrément de déformation plastique imposée.

$\overline{\varepsilon}$ = déformation plastique rationnelle.

σ_{ij} = contrainte quelconque.

σ^{*}_{ij} = contrainte non-imposée.

$\overline{\sigma_{ij}}$ = contrainte imposée.

l = système de glissement à l'état critique.

k = système de glissement quelconque.

n = nombre de systèmes de glissement à l'état critique.

p = nombre des composantes indépendantes de déformation plastique imposées.

$\delta\gamma^{l}$ = amplitude de glissement sur le système l.

δT = incrément de travail des forces extérieures pour un incrément de déformation plastique.

δW = incrément de travail des glissements pour un incrément de déformation plastique.

r_{ij} = rotations cristallines.

d_{ij} = incrément des déplacements.

δg_{ij} = incrément des déplacements dûs aux glissements.

M_{ij}^{k} = coefficients de SCHMID généralisés pour un système de glissement k.

τ^{k} = cission réduite sur le système de glissement k.

τ_{c}^{k} = cission critique sur le système de glissement k.

a, b, c, d = plans de glissement dans la notation de BISHOP

CHAPITRE I

RAPPEL DES THEORIES DE LA DEFORMATION PLASTIQUE DE CRISTAUX

I.1 - INTRODUCTION

Au cours de certains procédés de mise en forme, tels que l'étirage ou le laminage, pour lesquels de grandes déformations plastiques sont produites, les grains des matériaux polycristallins ont tendance à s'orienter dans une ou des directions préférentielles, ce qui conduit à la formation d'une texture. Les textures de déformation les plus largement observées et étudiées sont les textures de laminage dont deux exemples sont présentés sur la Figure 1 *(voir par exemple le livre de COULOMB* [1]*)*. Le développement de ces textures est dû à la rotation des axes cristallographiques durant la déformation plastique ; cette rotation résulte des glissements qui ont lieu à l'intérieur de chaque grain et varie donc d'un cristal à un autre. Les textures des métaux polycristallins dépendent donc des mécanismes de déformation des monocristaux. Dans nos travaux, nous ne considérons que la déformation par glissement en faisant abstraction du maclage (hypothèse raisonnable pour les métaux à forte énergie de défaut d'empilement).

Lorsque la déformation d'un monocristal rigide-plastique se fait par glissements cristallographiques, les paramètres qui caractérisent cette déformation que nous supposerons homogène sont :

- l'état de contrainte σ_{ij},
- les déformations plastiques $\delta\varepsilon_{ij}$,
- les systèmes de glissement à l'état critique,
- l'amplitude de glissement sur chacun de ces systèmes,
- la rotation cristalline.

Ces paramètres varient au cours de la déformation et dépendent évidemment de l'orientation initiale du cristal et des conditions extérieures imposées.

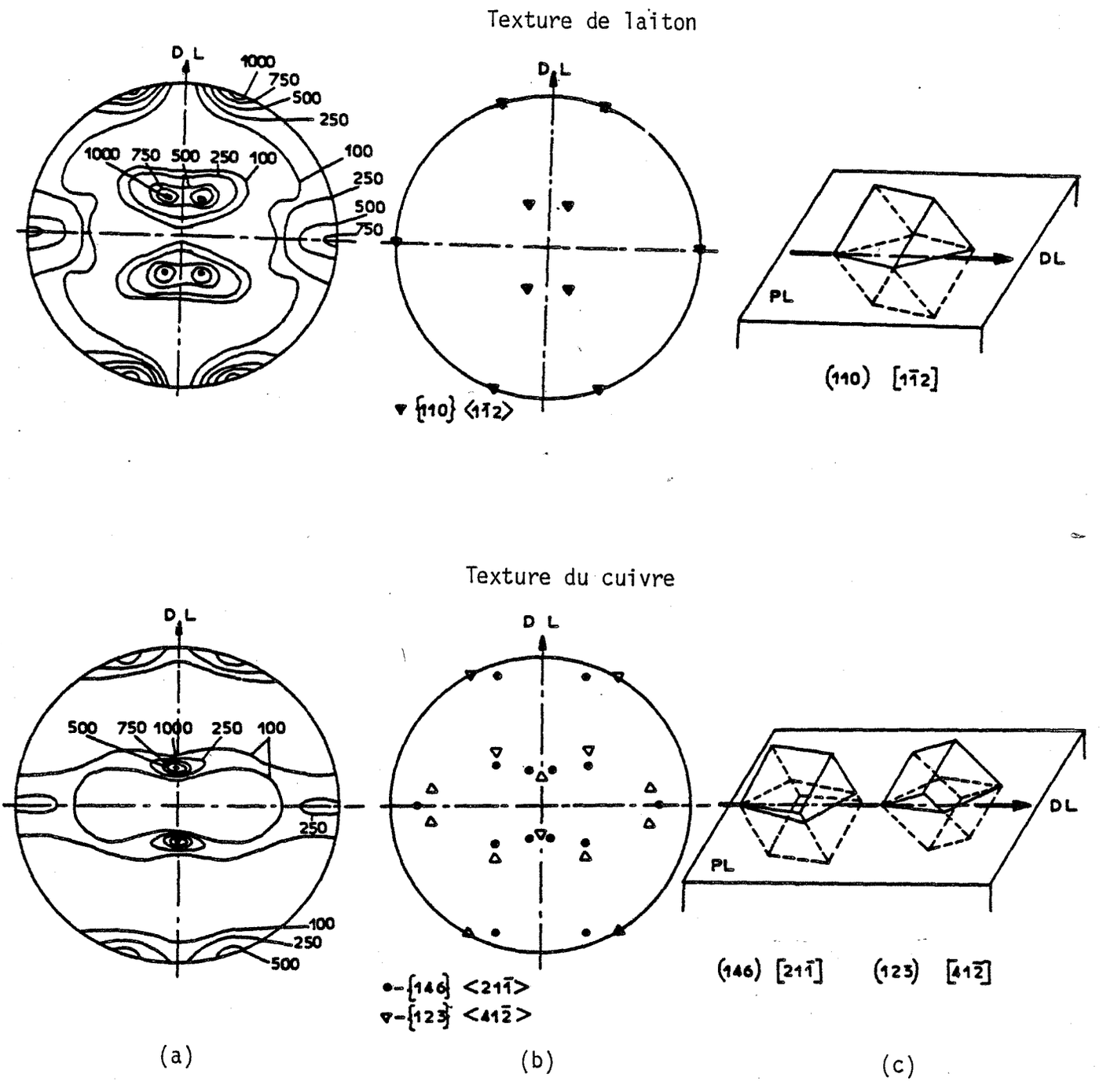


FIGURE 1 - Textures de laminage des métaux ou alliages c.f.c. [1]
(a) figures de pôles {111}
(b) orientations apparemment prédominantes
(c) positionsdes mailles élémentaires

Nous présenterons et discuterons dans ce premier chapitre, certains modèles de la déformation plastique de monocristaux et de polycristaux, tels que le modèle de SACHS (1928), de TAYLOR (1938) ou de BISHOP et HILL (1951). Le premier modèle impose, pour chaque cristal de l'agrégat polycristallin, l'état de contraintes, alors que les deux autres imposent l'état de déformation. Le cas des conditions mixtes (contraintes et déformations imposées) sera traité à l'aide du modèle plus récent de RENOUARD et WINTENBERGER (1976).

Rappelons que dans le cas des métaux C. F. C. qui nous intéressent ici, la déformation plastique (à température ambiante) a lieu par glissement sur des plans du type {111} et dans les directions <110> (12 systèmes possibles, *voir Tableau 1*, plus leurs opposés).

I.2 - CONDITIONS DE CONTRAINTES IMPOSEES : MODÈLE DE SACHS.

Le modèle de SACHS [2], fut le premier essai traitant la déformation des polycristaux du point de vue du comportement des cristaux. Il est basé sur l'hypothèse selon laquelle chaque grain d'un polycristal est soumis au même état de contraintes que l'agrégat. Dans ces conditions, un grain d'orientation quelconque, se déforme indépendamment des autres comme un monocristal libre, par la mise en action de son système de glissement le plus favorisé. Ce dernier est donné, à partir de l'ensemble de systèmes disponibles (d'indice k), par celui dont la cission réduite τ^k atteint une valeur critique τ_c^k (loi de SCHMID et BOAS).

$$\tau^k = \sum_{i,j} \sigma_{ij} M_{ij}^k \qquad (1)$$

où σ_{ij} = la contrainte appliquée

M_{ij}^k = facteur de SCHMID généralisé pour les systèmes de glissement qui sont définis par leurs normales au plan de glissement n_i^k et leurs directions de glissement b_j^k *(Fig. 2)*

$$M_{ij}^k = \frac{1}{2} (b_i^k \; n_j^k + b_j^k \; n_i^k) \qquad (2)$$

Lorsqu'un système est à l'état critique, donc susceptible de glisser, nous le désignons par l'indice l. La condition de glissement est alors :

$$\tau^k = (\tau^l) = \tau_c^l$$

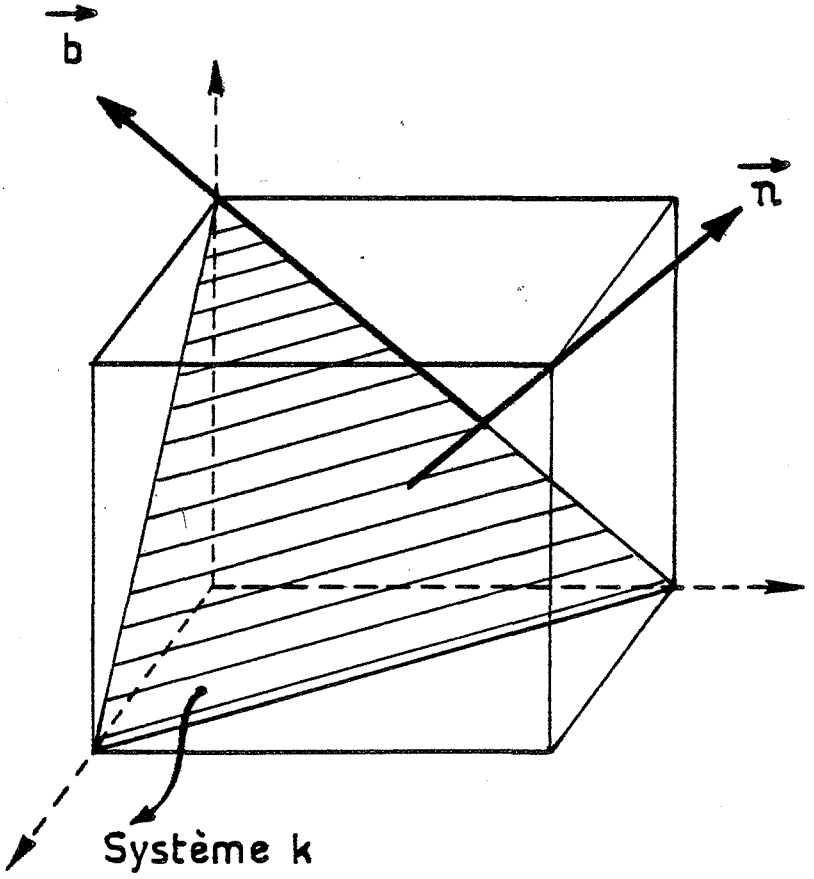
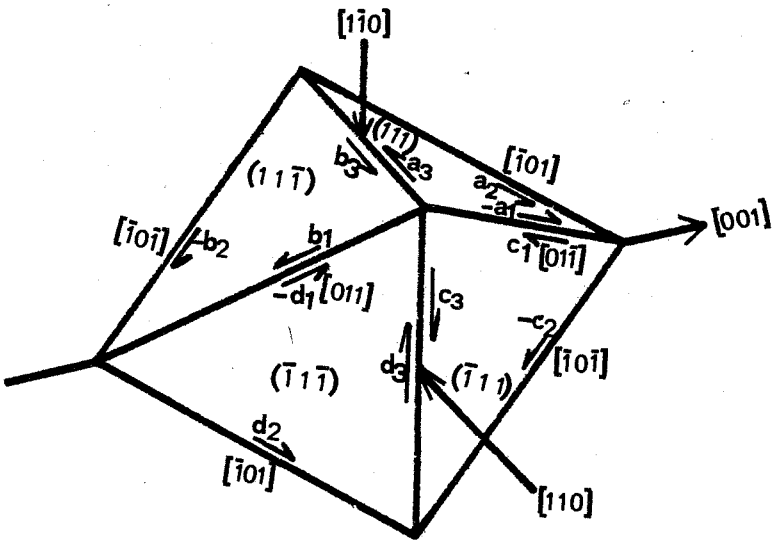


FIGURE 2 - Normale $\vec{n}$ et direction $\vec{b}$ du système de glissement k.

Plan de glissement	111	$\bar{1}\bar{1}1$	$\bar{1}11$	$1\bar{1}1$
Direction de glissement	$01\bar{1}$ $\bar{1}01$ $1\bar{1}0$	$0\bar{1}\bar{1}$ 101 $\bar{1}10$	$01\bar{1}$ 101 $\bar{1}\bar{1}0$	$0\bar{1}\bar{1}$ $\bar{1}01$ 110
Système de glissement	a_1 a_2 a_3	b_1 b_2 b_3	c_1 c_2 c_3	d_1 d_2 d_3

Notation conventionnelle des systèmes de glissements (BISHOP) [14].



Polyèdre des glissement dans un C. F. C.

Tableau 1 : Systèmes de glissements dans le C. F. C.

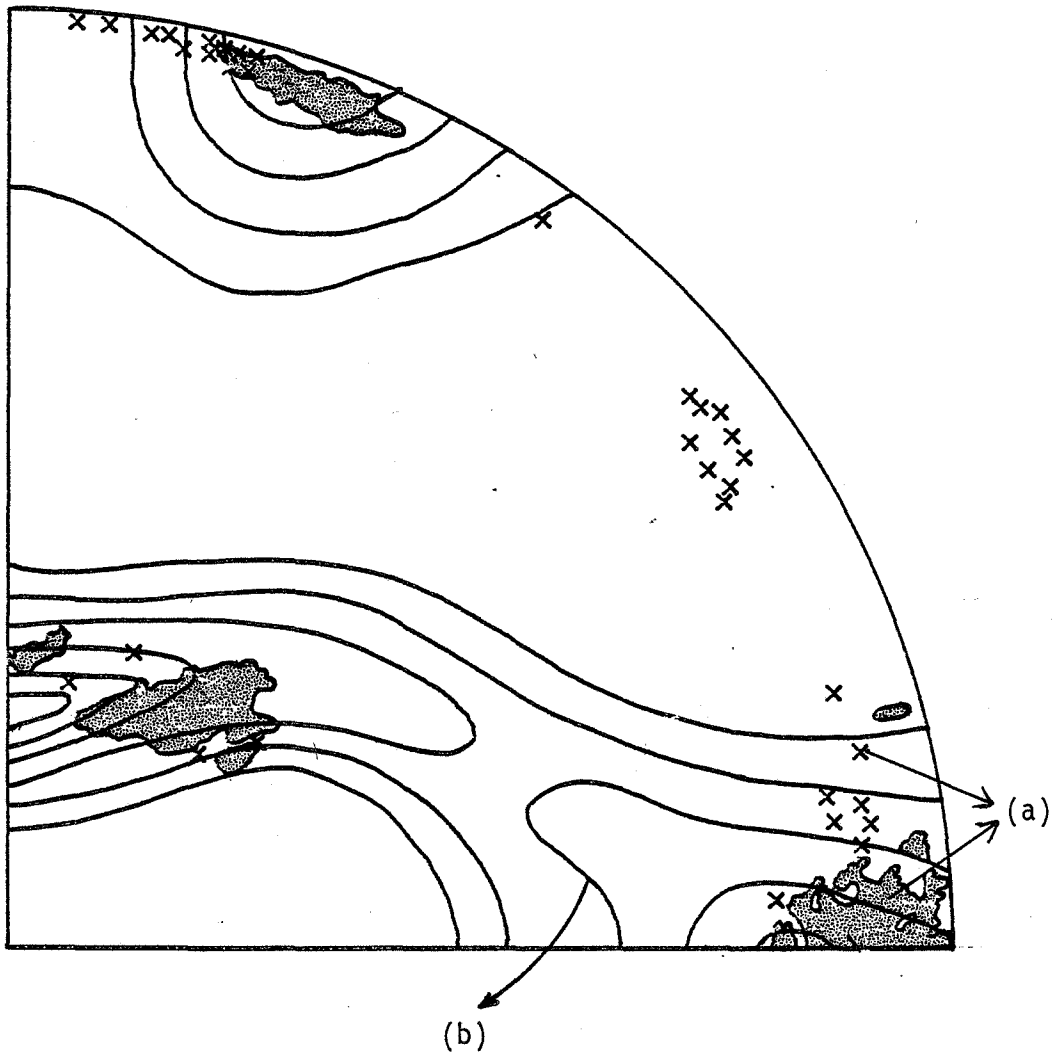


FIGURE 3 - Texture de figures de pôles {111} ; (a) calculée à l'aide du modèle de SACHS et, (b) mesurée, sur des polycristaux de cuivre laminés (taux de réduction 80 %), d'après LEFFERS [5]

Le modèle de SACHS ne rend pas compte de la continuité de la déformation aux joints de grains. Il implique que chaque grain se déforme de manière différente, par glissement simple, conduisant inévitablement à une séparation du matériau aux joints de grains. Ceci n'est pas observé pour les métaux ductiles.

Par ailleurs, lorsqu'on utilise ce modèle pour calculer soit les relations contrainte - déformation $\sigma(\varepsilon_p)$ d'un polycristal à partir de $\tau(\Sigma\delta\gamma^l)$ pour un monocristal (KOCKS [3] ; LEFFERS [4]), soit les textures de laminage (LEFFERS [5] pour les métaux C. F. C. *(Fig.3)* et DILLAMORE et KATOH [6] pour les métaux C. C.), on constate des écarts importants entre calculs et expériences. Ces résultats montrent que le modèle de SACHS ne décrit pas correctement le comportement plastique des polycristaux. Il reste bien sûr valable en première approximation, pour les essais de déformation de monocristaux sous contraintes imposées, par exemple dans un essai de traction.

I.3 - CONDITIONS DE DÉFORMATIONS IMPOSÉES.

I.3.1. - MODELE ET METHODE DE TAYLOR

Dans un matériau polycristallin, la déformation de chaque grain ne peut pas se faire librement du fait de la présence des grains voisins. TAYLOR [7] suppose que chaque grain se déforme de la même manière que l'agrégat polycristallin en respectant la continuité de la déformation à travers les joints de grains. Ceci implique que les 5 termes du tenseur de déformation de chaque grain sont imposés. Comme l'a montré VON MISES [8], il faut pour un cristal au moins 5 systèmes de glissement indépendants pour accommoder une déformation plastique complètement imposée. Ces systèmes sont à choisir parmi les 12 systèmes {111} <110> des cristaux C.F.C. (plus leurs opposés).

Parmi toutes les combinaisons de 5 systèmes de glissement capables d'accommoder la déformation imposée, TAYLOR [7] propose un choix basé sur un critère de travail minimal. Il propose que la ou les combinaisons actives, pour un incrément de déformation plastique $\delta\varepsilon_{ij}$, sont celles qui minimisent le travail interne des glissements, soit :

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} \tau_c^k \, |\delta\gamma^k| \qquad (3)$$

où
- k : indice de système de glissement
- n : nombre de systèmes d'une combinaison
- $\delta\gamma^k$: amplitude de glissement sur le système k
- τ_c^k : contrainte de cission critique sur le système k.

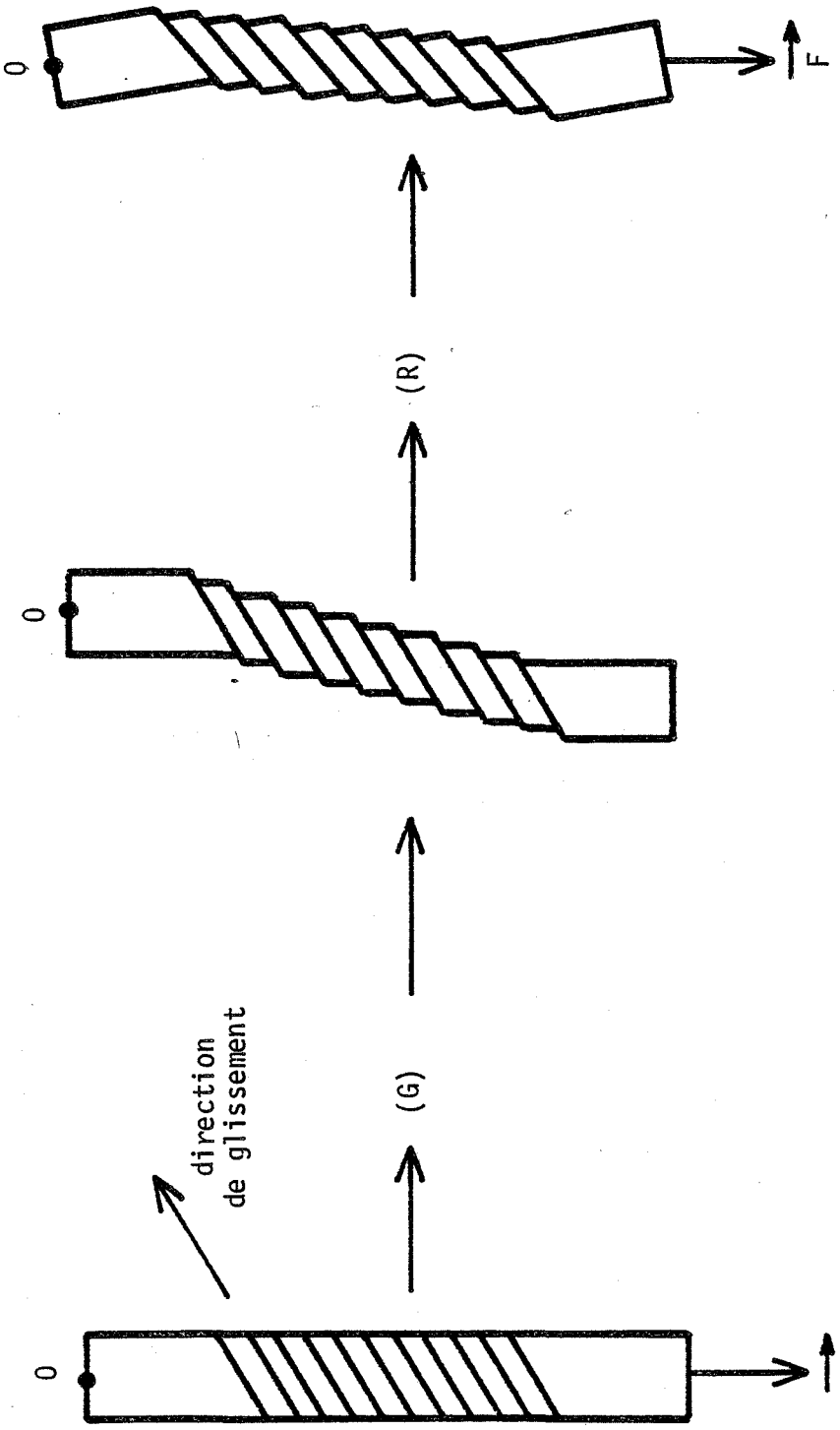


FIGURE 4 - Déplacements = glissements + rotations

[D] = [G] + [R]

Si τ_c^k est supposé identique pour tous les systèmes k, la condition de TAYLOR revient donc à minimiser la somme des valeurs absolues des amplitudes de glissement, soit :

$$\tau_c \sum_{k=1}^{n} |\delta\gamma^k| \quad \text{minimal} \tag{4}$$

On détermine ainsi, dans chaque cristal, les systèmes de glissement (l) susceptibles de glisser. Une fois ceux-ci connus, on peut toujours faire en sorte que tous les $\delta\gamma^l$ soient positifs ou nuls en changeant si besoin est le sens de l'un des vecteurs unitaires $\vec{n}^l$ ou $\vec{b}^l$. Dans la suite, nous supposerons toujours que $\delta\gamma^l \geq 0$.

Les déformations plastiques $\delta\varepsilon_{ij}$ sont définies par :

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} + d_{ji}) \tag{5}$$

où $d_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ sont les déplacements plastiques imposés.

Les composantes $\delta\varepsilon_{ij}$ de la matrice symétrique des déformations infinitésimales sont aussi liées aux amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ par les relations :

$$\delta\varepsilon_{ij} = \sum_{l=1}^{n} M_{ij}^l \ \delta\gamma^l \tag{6}$$

Du fait de la conservation du volume du cristal (en déformation plastique), seulement cinq des six termes $\delta\varepsilon_{ij}$ sont indépendants :

$$\sum_{i=1}^{3} \delta\varepsilon_{ii} = 0 \tag{7}$$

La matrice de rotation du réseau cristallin δr_{ij} *(Fig. 4 et 5)* est donnée par la différence entre les déplacements imposés $d_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ et les déplacements g_{ij} produits par les glissements seuls (GOUX [9], RENOUARD et WINTENBERGER [10, 11] par exemple).

$$\delta g_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_i^l \ n_j^l \ \delta\gamma^l \tag{8}$$

d'où $$\delta r_{ij} = d_{ij} - \delta g_{ij} \tag{9}$$

Or dans de très nombreux cas de déformation, il existe plusieurs combinai-

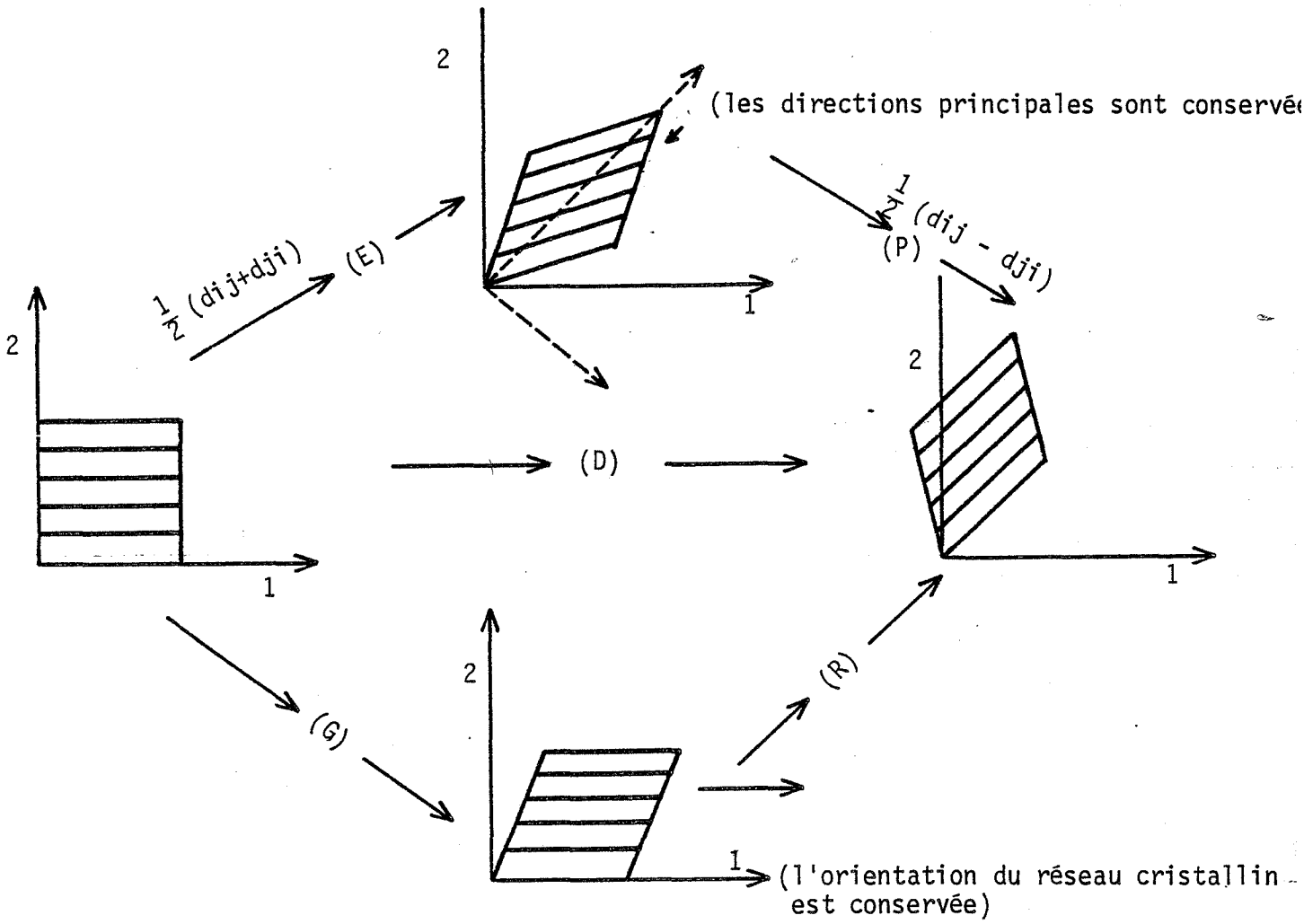


FIGURE 5 - Rotation cristalline [R] = [D] - [G]

sons de systèmes de glissement qui minimisent l'expression (4) et la rendent stationnaire en $\delta\gamma$. Les amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ sont alors indéterminées ainsi que la rotation cristalline r_{ij}.

I.3.2 - METHODE DE BISHOP et HILL

D'après BISHOP et HILL [12, 13], si on impose tous les incréments de déformation $\delta\varepsilon_{ij}$ du cristal, l'état de contraintes réel est celui qui rend maximal le travail des forces extérieures par unité de volume soit :

$$\delta T = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \, \delta\varepsilon_{ij} \qquad (10)$$

où σ_{ij} est un tenseur qui respecte les conditions d'équilibre

Dans ce cas, BISHOP [14] a démontré que pour les métaux C.F.C. ayant une consolidation isotrope, le nombre des états de contraintes possibles, correspondant aux solutions pour lesquelles $\tau^l = \tau_c^l$, est limité à 56 dont 28 se déduisent par simple changement de signe. Ces états de contraintes sont donnés en Annexe 1. Il y a des solutions qui comportent 6 systèmes à l'état critique et des solutions qui en comportent 8.

Comme pour le cas de TAYLOR, les amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ sont indéterminées car le nombre de systèmes de glissement susceptibles de glisser (n) est supérieur au nombre des composantes indépendantes de la déformation $\delta\varepsilon_{ij}$ imposées (p). L'indétermination des $\delta\gamma^l$ entraine celle de la rotation cristalline r_{ij} (équations (8) et (9)).

CHIN et MAMMEL [15] ont montré mathématiquement que dans le cas de la déformation complètement imposée d'un cristal, les méthodes de TAYLOR et de BISHOP et HILL conduisent aux mêmes résultats. Ils ont montré ainsi que la cission résolue τ atteint sa valeur critique sur les systèmes actifs choisis par les méthodes de TAYLOR et de BISHOP et HILL. Pour les calculs numériques, il est en général plus pratique d'utiliser le tableau de BISHOP *(Annexe 1)*.

I.4 - APPLICATIONS DES MODELES DE TAYLOR, BISHOP ET HILL.

Nous venons de voir que, pour les cristaux C. F. C., une déformation complètement imposée conduit généralement à des solutions bien définies pour les éner-

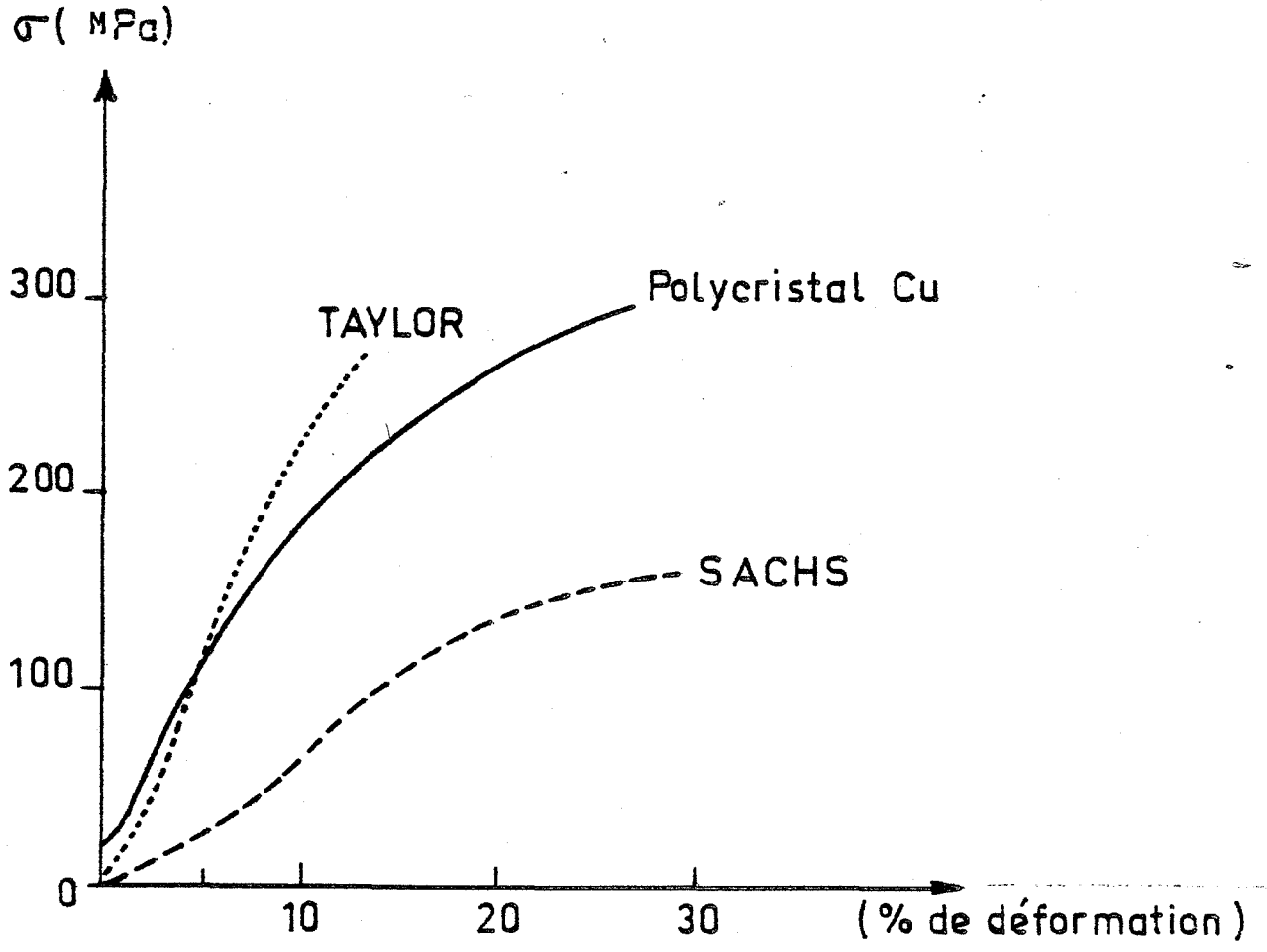


FIGURE 6 - Courbe expérimentale contrainte -déformation en traction d'un polycristal de Cu, et courbes dérivées des monocristaux pour les polycristaux sur la base des modèles de SACHS ($\overline{M}$ = 2,24) (orientation quelconque) et de TAYLOR ($\overline{M}$ = 3,06) (orientation proche de <111>) [3].

gies de déformation (δT) mais indéterminées pour la rotation cristalline. Les énergies permettent de déterminer les courbes de traction σ (εp) de polycristaux à partir des courbes $\tau(\Sigma\delta\gamma^l)$ pour les monocristaux (orientés en glissement multiple) à partir du facteur de TAYLOR M défini par :

$$M = \frac{\Sigma\delta\gamma^l}{\delta\varepsilon_p}$$

Pour un polycristal C. F. C. contenant une répartition aléatoire de N grains $\overline{M} = \frac{\Sigma Mi}{N} = 3{,}067$; cette valeur est une borne supérieure. Le modèle de SACHS donne une borne inférieure $\overline{M} = 2{,}24$. La figure 6 montre un exemple des courbes $\sigma(\varepsilon p)$ obtenues à partir des $\overline{M}$ dans le cas des modèles de SACHS et de TAYLOR. Ce principe de calcul a été appliqué par plusieurs auteurs [16, 17] à d'autres modes de déformations, par exemple la compression plane (Fig. 7).

La méthode de TAYLOR ne permet pas de prédire les textures de déformation du fait de l'indétermination de la rotation cristalline r_{ij}. Toutefois, on peut montrer [18] que dans le cas où l'indétermination est d'ordre 1 (n = 6) les extrêmités des axes des rotations possibles se trouvent sur un segment (dans un espace défini par les 3 composantes du vecteur rotation) dont on peut calculer les bornes. Ceci est possible car les amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ sur chaque système l sont positives *(voir I.3)* et ont des valeurs limites (sinon, l'énergie pourrait devenir infinie), l'indétermination n'est donc pas totale. Dans le cas de l'indétermination d'ordre 3 (8 systèmes de glissement critiques), on peut déterminer un polyèdre (dans l'espace défini par les 3 composantes du vecteur rotation) sur lequel doit se trouver l'extrêmité de l'axe de rotation réel. On peut représenter les valeurs limites des rotations dans ce cas, en choisissant 2 rotations extrêmes, par exemple à l'aide d'un programme réalisé par R. FORTUNIER [19]. Ceci est illustré sur la figure 8 pour un cristal C. F. C. déformé en compression plane.

Pour calculer les textures de déformations par la méthode de TAYLOR, certains auteurs ont calculé les rotations cristallines en prenant soit des solutions aléatoires (KALLEND et DAVIES [20]) soit une solution "moyenne" parmi l'ensemble des solutions possibles (VAN HOUTTE [21]). Les figures 9 et 10 montrent deux exemples de textures calculées par la méthode de TAYLOR (en prenant une solution aléatoire) et mesurées sur du cuivre polycristallin déformé en laminage d'après KALLEND et DAVIES [20] et en torsion par SEVILLANO et al [22].

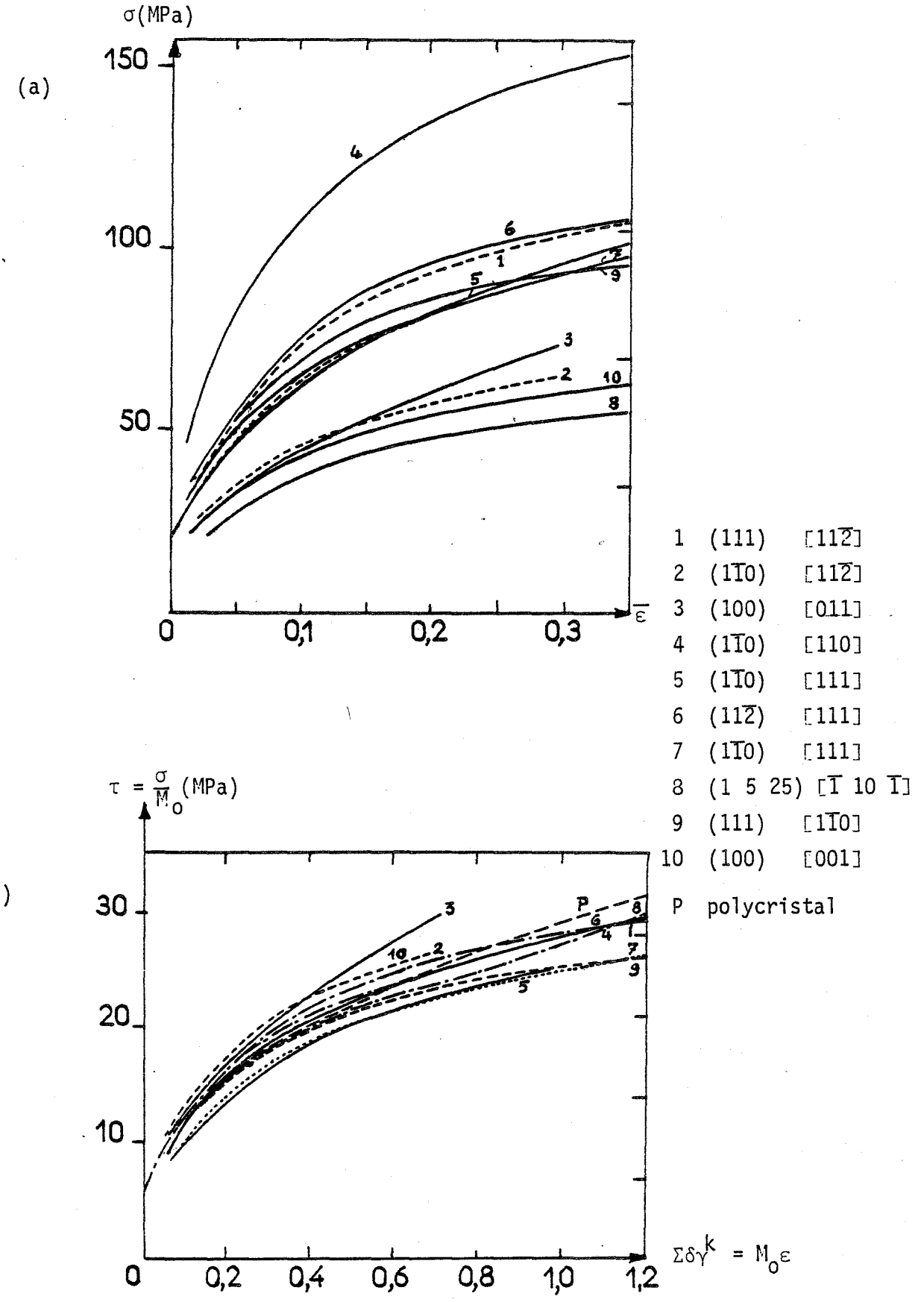
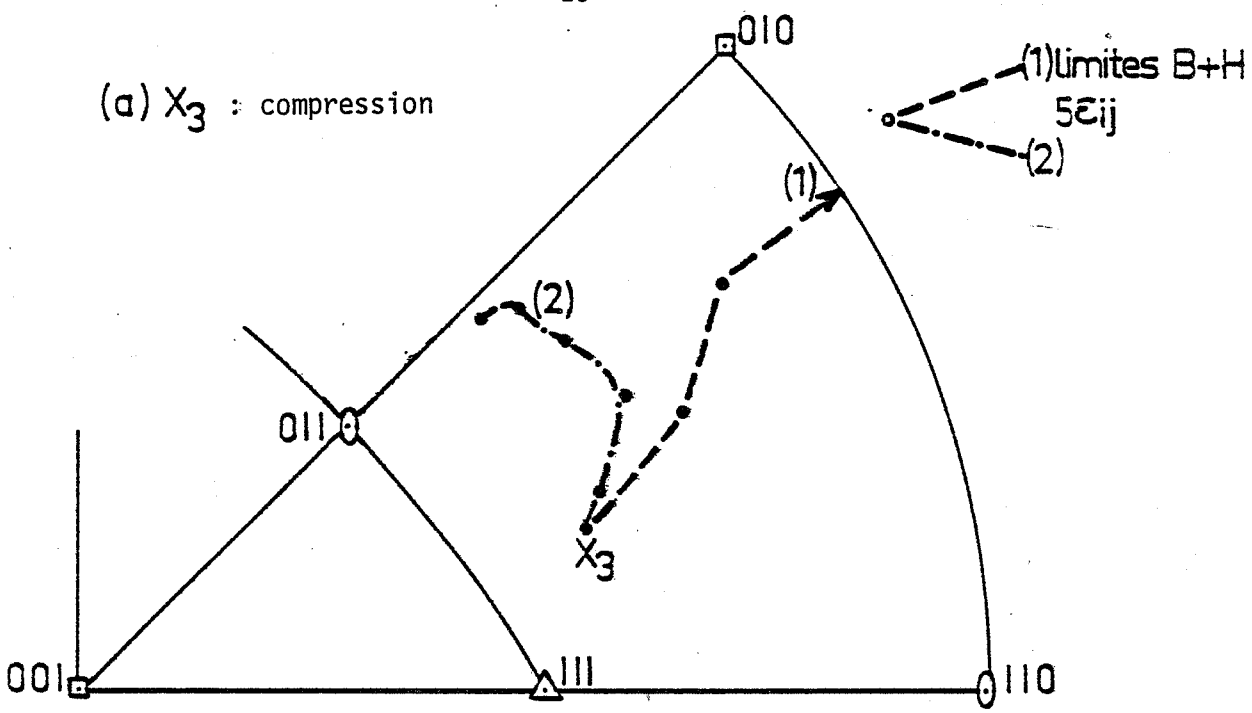


FIGURE 7 - (a) Courbes contrainte -déformation $\sigma(\bar{\varepsilon})$ de monocristaux d'aluminium en compression plane obtenues par HOSFORD [17]
(b) Courbes cission résolue-cisaillement, $\tau = f(\Sigma\delta\gamma^k)$, pour des monocristaux d'aluminium en compression plane obtenues par HOSFORD [17]



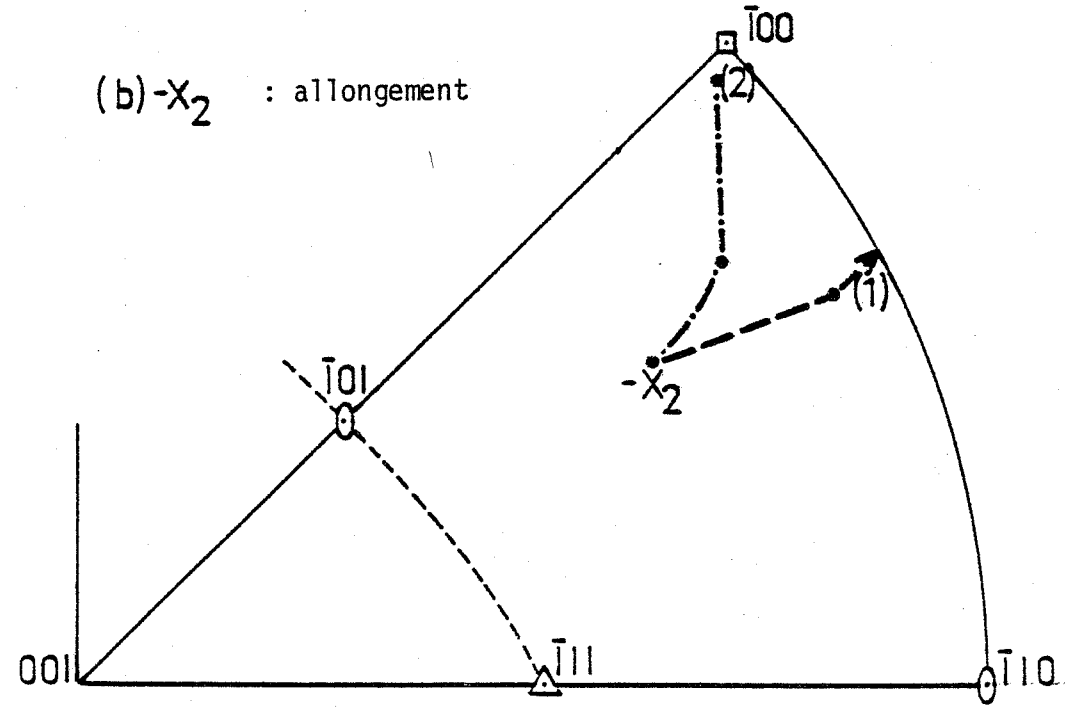


FIGURE 8 - Valeurs limites des orientations possibles calculées à l'aide du modèle de BISHOP et HILL pour un cristal C.F.C. d'orientation initiale ≃ (485) [3$\bar{1}\bar{1}$] déformé en compression plane [37]

X_3 = axe de compression, X_2 = axe d'allongement

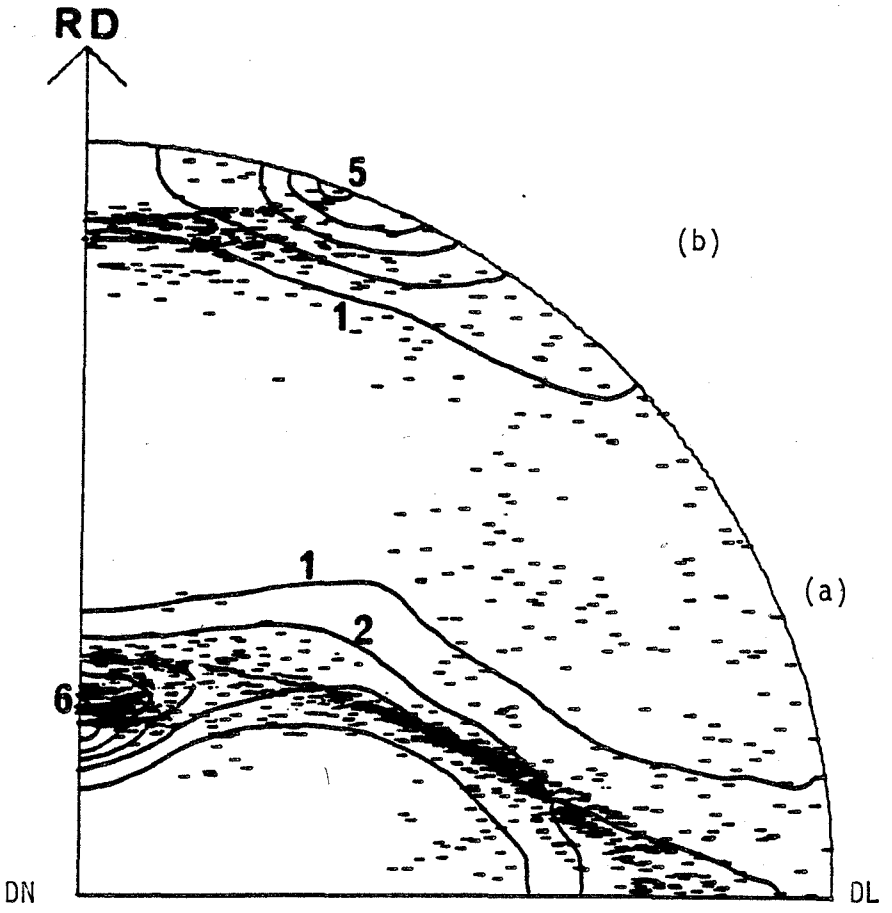


FIGURE 9 - Texture de figures de pôles {111}, (a) calculée à l'aide du Modèle de TAYLOR et (b) mesurée sur des polycristaux de cuivre laminés (taux de réduction 80 %), d'après KALLEND et DAVIES [20].

I.5 - CONDITIONS DE CONTRAINTES ET DEFORMATIONS IMPOSEES : CONDITIONS MIXTES.

La différence principale entre les modèles de glissements multiples (TAYLOR, BISHOP et HILL) et de glissement simple (SACHS) réside dans le fait que :

- dans les premiers, on suppose que les déformations des grains sont complètement imposées, ce qui assure la compatibilité de la déformation, alors que,
- dans le second, on suppose que les contraintes sont imposées, ce qui assure l'équilibre entre les grains sans tenir compte de la compatibilité des déformations des cristaux.

Or dans de nombreux cas pratiques, ni la contrainte, ni la déformation ne sont complètement imposées. Les conditions limites de déformations sont intermédiaires entre ces deux extrêmes avec le nombre de composantes de déformation imposées $0 < p < 5$. Il est donc intéressant d'étudier le cas des conditions mixtes (contraintes et déformations imposées).

Afin de mieux distinguer les termes imposés des termes non imposés, nous adopterons par la suite la nomenclature ci-dessous :

$\overline{e_{ij}}$ = composante imposée du tenseur des déformations plastiques $[\bar{e}]$

e^*_{ij} = composante non imposée du tenseur des déformations $[e^*]$

avec ε_{ij} = l'ensemble des déformations = $\overline{e_{ij}}$ et e^*_{ij}, $[\varepsilon] = [\bar{e}] + [e^*]$

$\overline{\sigma_{ij}}$ = composante imposée du tenseur des contraintes $[\bar{\sigma}]$

σ^*_{ij} = composante non imposée du tenseur des contraintes $[\sigma^*]$

et σ_{ij} = l'ensemble des contraintes = $\overline{\sigma_{ij}}$ et σ^*_{ij}, $[\sigma] = [\bar{\sigma}] + [\sigma^*]$

I.5.1 - MODELE DE RENOUARD et WINTENBERGER [10, 11].

Ce modèle est une généralisation des modèles de TAYLOR et de BISHOP et HILL au cas où es contraintes et es déformations sont imposées au cristal. Le modèle suppose que , pour chaque paire d'indice (i,j), on connait : soit la déformation $\delta\overline{e_{ij}} = \frac{1}{2}(d_{ij} + d_{ji})$ soit la contrainte $\overline{\sigma_{ij}}$. Si p est le nombre de

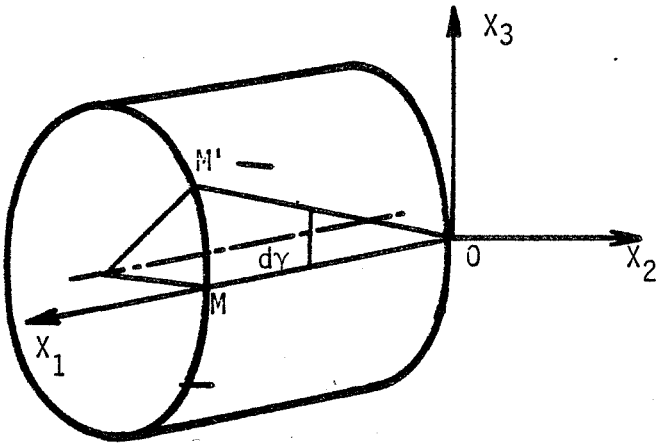


FIGURE 10a - Torsion d'un cylindre. Définition du repère OX_1, X_2, X_3 lié au solide.

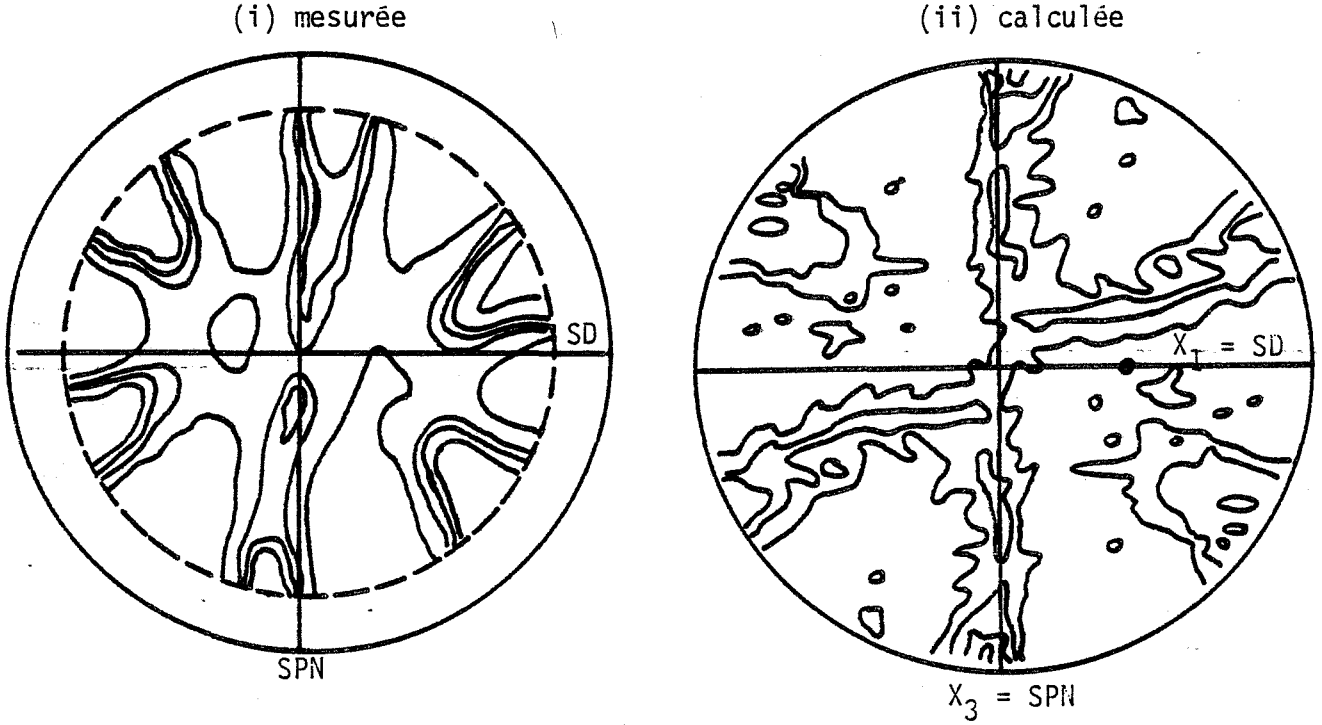


FIGURE 10b - Figures de pôles {111} montrant la texture calculée à l'aide du modèle de TAYLOR et la texture mesurée, sur le cuivre, pour une déformation par cisaillement $\gamma = 1$. D'après Gil Sevillano et al. [22]

$\overline{\delta e_{ij}}$ connus, il y a alors p σ^*_{ij} non connus.

Soit n le nombre de systèmes de glissement à l'état critique. On rappelle qu'un système l est actif quand $\tau^l = \pm \tau^l_c$ où τ^l est la cission résolue et τ^l_c (>0) est la cission critique du système l.

Détermination des systèmes de glissement à l'état critique.

Pour déterminer les systèmes de glissement à l'état critique, RENOUARD et WINTENBERGER [11] ont montré qu'on peut procéder de deux façons :

1) La solution réelle doit minimiser

$$\delta T = \sum_k \delta\gamma^k \left[\tau^k_c - \sum_{i,j} \overline{\sigma_{ij}} M^k_{ij} \right] \qquad (11)$$

où chaque $\delta\gamma^k$ $(\pm \tau^k_c) \geq 0$ et où la sommation $\sum_{i,j}$ est seulement étendue aux $\underline{\overline{\sigma_{ij}}}$ imposés. $\sum_k |\delta\gamma^k \tau^k_c|$ est le travail interne des déformations plastiques.

On peut démontrer *(Annexe 2)* que δT est le travail des glissements sous l'action des contraintes non-imposées. Cette méthode est une généralisation de celle de TAYLOR.

2) La solution réelle rend maximal le travail des forces extérieures des contraintes non-imposées

$$\delta T = \sum_{i,j} \sigma^*_{ij} \overline{\delta e_{ij}}$$

où la sommation $\sum_{i,j}$ est seulement étendue aux $\underline{\overline{\delta e_{ij}}}$ imposés.

Cette méthode est une généralisation de celle de BISHOP et HILL.

La démonstration de l'équivalence de ces deux méthodes par M. WINTENBERGER [23] est présentée en détail en Annexe 2.

Le problème des conditions mixtes est très important car dans la plupart des essais mécaniques classiques, les cristaux sont déformés dans des conditions assez proches des conditions mixtes. Par exemple, les essais de HOSFORD et CHIN, cités précédemment dans le cadre de la vérification du modèle de TAYLOR, ont été

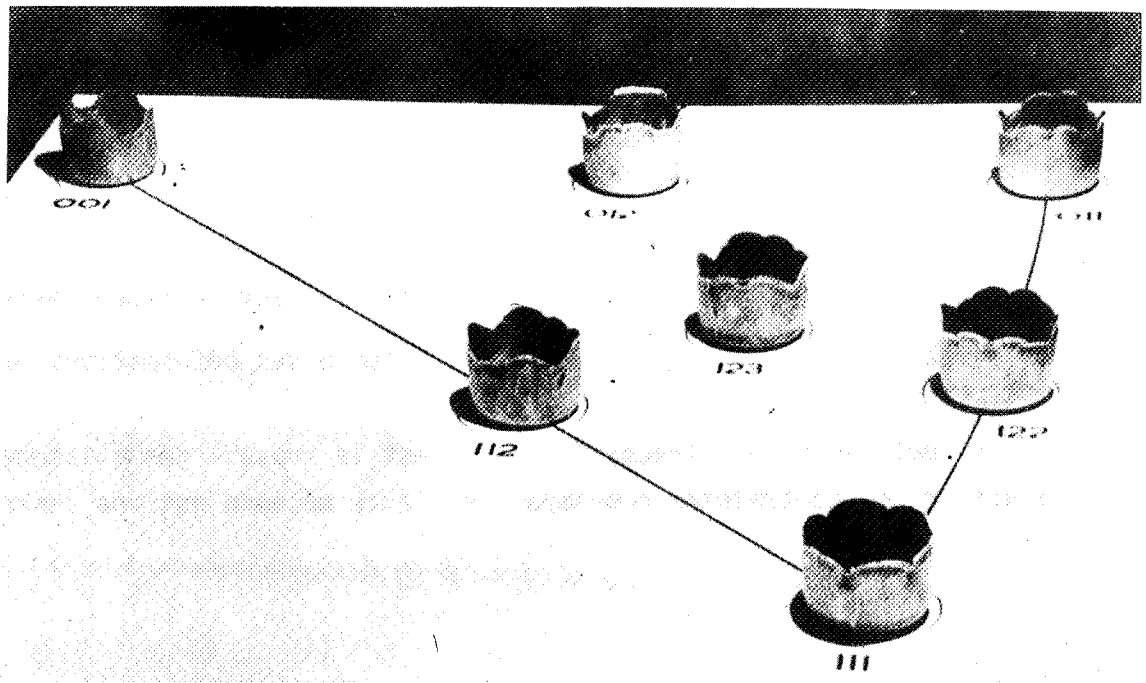


FIGURE 11 - Cornes d'emboutissage dans les monocristaux d'aluminium d'après TUCKER [24].

effectués à l'aide d'un dispositif de compression plane n'imposant que 3 composantes indépendantes de la déformation *(voir chapitre II)*.

De même lors de l'emboutissage de tôle mince, les déformations radiales ne sont pas imposées, ce qui conduit à la formation de cornes d'emboutissage lorsque le matériau possède une texture cristallographique. La figure 11 montre un exemple classique de TUCKER [24] sur l'emboutissage des monocristaux d'aluminium.

Enfin, si on fait l'hypothèse que les grains dans un polycristal se déforment comme s'ils étaient partiellement encastrés, on peut calculer les textures de déformations pour des grains déformés en conditions mixtes.

A titre d'exemple, pour le cas du laminage, HONNEFF et MECKING [25] ont proposé la possibilité de cisaillements des grains librement ajustables (Fig. 12). La figure 13 montre un exemple de la texture de laminage c.f.c. calculée de cette façon par VAN HOUTTE et ARNOUDT [26]. On constate que la texture calculée par cette méthode est meilleure que celle calculée à l'aide du modèle de TAYLOR mais reste encore beaucoup plus marquée que la texture expérimentale. Le problème des modes de déformations d'un grain dans une tôle laminée est traité en détail dans le chapitre IV.

I.6 - PROBLÈMES ACTUELS.

D'après ce que nous venons de voir, deux problèmes importants concernant la déformation plastique d'un grain dans un polycristal se posent actuellement :

- le premier est la détermination de la déformation réelle d'un grain dans un polycristal et
- le second est le calcul des amplitudes de glissements $\delta\gamma^l$ lorsque le nombre n des systèmes critiques est supérieur au nombre p des $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés.

Les modèles dits "self consistent" ou autoéquilibrés, notamment ceux de KRÖNER [27] ; ZARKA [28] ; ZAOUI et BERVEILLER [29], apportent une première réponse au problème de la détermination de la déformation réelle d'un grain dans un polycristal. Le principe de ces modèles est de résoudre un problème d'interaction entre un grain particulier de l'agrégat polycristallin, considéré comme une inclusion, et une matrice (chaque grain est noyé dans une matrice infinie qui est constituée de tous les autres grains du polycristal). Les caractéristiques mécaniques de la matrice

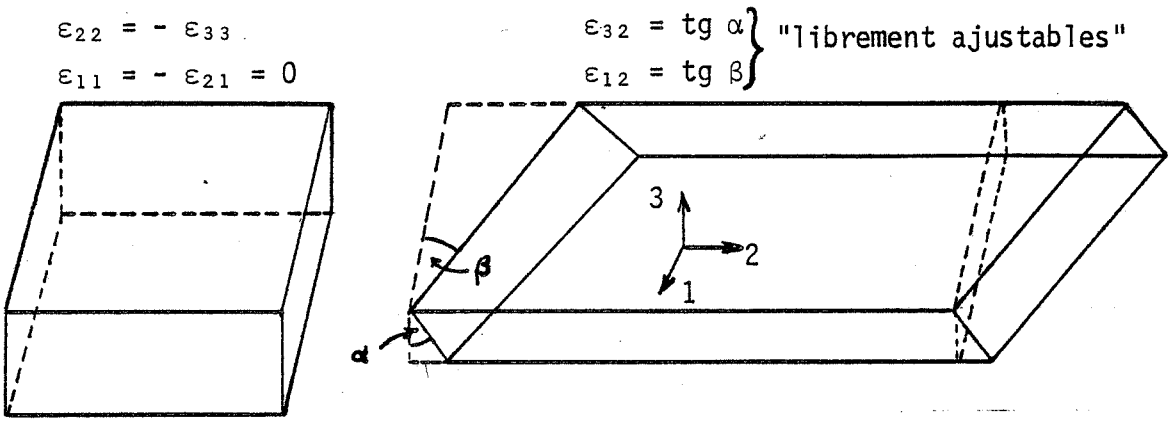


FIGURE 12 - Déformation d'un monocristal en laminage, d'après MECKING [25]

sont les moyennes de celles de chaque grain. Le détail de ces modèles a été rappelé récemment par BERVEILLER, HIHI et ZAOUI [30]. Un exemple d'application d'un de ces modèles à l'essai de traction de métaux C.F.C. est exposé dans la thèse de P. MACHETO [31]. A cause de la complexité des calculs, ces méthodes sont en général limitées à de faibles déformations.

L'hypothèse de HONNEFF et MECKING [25] selon laquelle la déformation des grains est partiellement imposée (à cause de leurs formes), simplifie les calculs dans le cas de grandes déformations. Ceci permet, comme nous venons de le voir, de calculer les textures de déformation, par exemple les textures de laminage (VAN HOUTTE [32]) ou de torsion (KOCKS, CANOVA et JONAS [33]).

En ce qui concerne le problème de l'indétermination des amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$, RENOUARD et WINTENBERGER [11] ont récemment proposé une hypothèse basée sur les énergies de déformation plastique de 2ème ordre pour lever l'indétermination.

I.7 - PRISE EN COMPTE DES ÉNERGIES DE DÉFORMATION PLASTIQUE DE 2ÈME ORDRE.

Selon la généralisation de la méthode de TAYLOR, pour une déformation quelconque $[\varepsilon]$ avec p composantes imposées, les solutions possibles pour les amplitudes $\delta\gamma^l$ des glissements vérifient les relations :

$$\begin{cases} \delta T = \sum_l \delta\gamma^l \left(\tau_c^l - \overline{\sigma_{ij}}\, M_{ij}^l\right) = \sigma_{ij}^*\, \overline{e_{ij}} \\ \overline{e_{ij}} = \sum_l \delta\gamma^l\, M_{ij}^l \qquad \text{(p relations)} \end{cases}$$

Lorsque ces expressions conduisent à une indétermination des $\delta\gamma^l$, d'ordre n-p, RENOUARD et WINTENBERGER [34] proposent que la solution réelle, pour les $\delta\gamma^l$, soit celle qui minimise l'énergie de déformation plastique de second ordre $d(\delta T)$.

Pour trouver une expression de $d(\delta T)$, on considère deux déformations successives, infiniment petites, dont la deuxième est caractérisée par les mêmes déformations

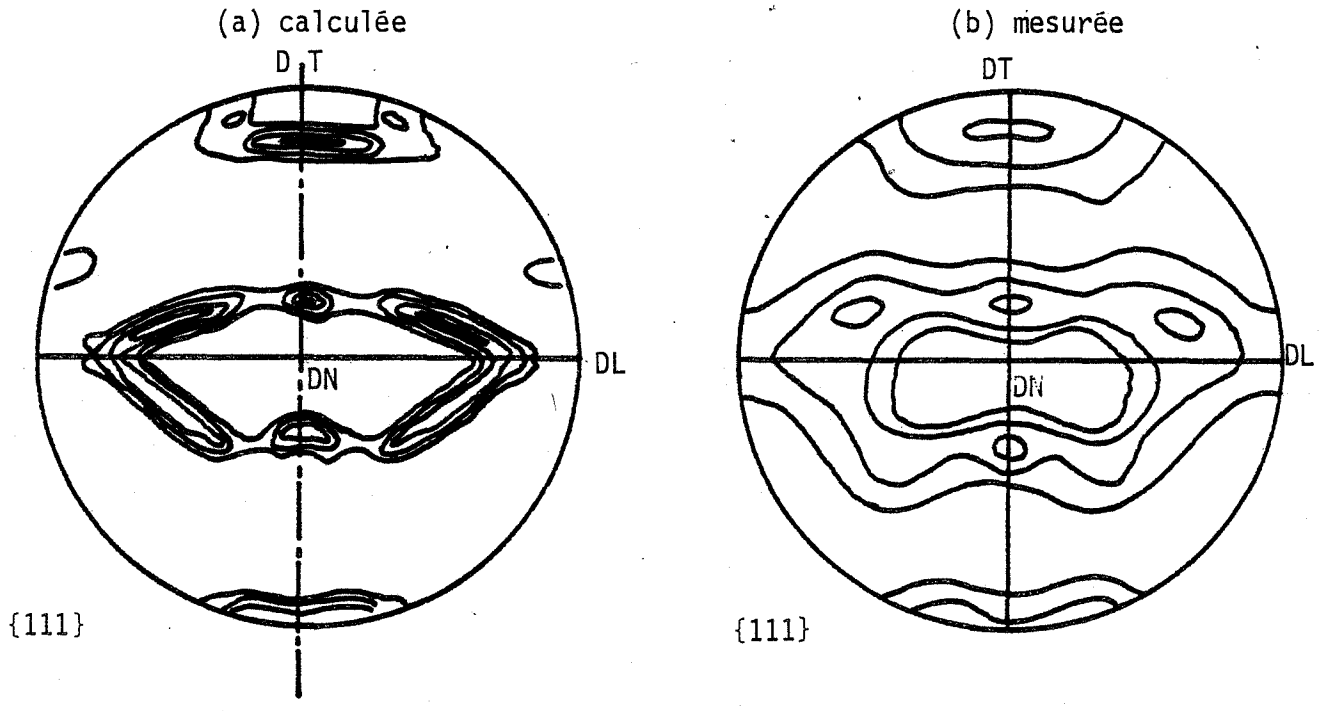


FIGURE 13 - Figures de pôles {111} montrant la texture calculée et la texture mesurée en surface (aluminium - taux de réduction au laminage à froid 95 %) et illustrant la perte de symétrie par rapport au plan (DT, DN), simulée par l'introduction d'une composante non diagonale dans le tenseur gradient de déplacement. D'après Van Houtte et Aernoudt [26]

imposées $\bar{e}_{ij}$ et se produit en mettant en jeu les mêmes systèmes de glissement (l) (critère de continuité des glissements) que la première [ε]. Les amplitudes de glissement de la deuxième déformation ($\delta\gamma^l + d(\delta\gamma^l)$) sont infiniment proches des $\delta\gamma^l$ de la première, de sorte que la deuxième déformation vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} \delta T + d(\delta T) = \sum_l \left(\delta\gamma^l + d(\delta\gamma^l)\right) [\tau_c^l + d\tau_c^l - \bar{\sigma}_{ij} M_{ij}^l - \bar{\sigma}_{ij} dM_{ij}^l - M_{ij}^l d\bar{\sigma}_{ij}] \\ \bar{e}_{ij} = \sum_l \left(\delta\gamma^l + d(\delta\gamma^l)\right) [M_{ij}^l + dM_{ij}^l] \end{cases}$$

où les dM_{ij}^l sont les variations de M_{ij}^l dûes au changement d'orientation du cristal après la première déformation, soit :

$$dM_{ij}^l = \frac{1}{2} (db_i^l n_j^l + b_i^l dn_j^l + db_j^l n_i^l + b_j^l dn_i^l)$$

$$d\vec{b} = \vec{r} \wedge \vec{b} \quad \text{et} \quad d\vec{n} = \vec{r} \wedge \vec{n}$$

et $d\tau_c^l$ représente la consolidation du sytème l.

Multiplions la dernière expression de $\bar{e}_{ij}$ par σ_{ij}^*.

$$\Rightarrow \sigma_{ij}^* \ \bar{e}_{ij} = \delta T = \sum_l \sigma_{ij}^* \left(\delta\gamma^l + d(\delta\gamma^l)\right) [M_{ij}^l + dM_{ij}^l]$$

à l'aide de cette dernière relation et de l'expression de $\delta T + d(\delta T)$ on peut écrire :

$$d(\delta T) = \sum_l \left(\delta\gamma^l + d(\delta\gamma^l)\right) [\tau_c^l + d\tau_c^l - \overline{\sigma_{ij}} M_{ij}^l - \overline{\sigma_{ij}} dM_{ij}^l - M_{ij}^l d\overline{\sigma_{ij}} - \sigma_{ij}^* M_{ij}^l - \sigma_{ij}^* dM_{ij}^l] \qquad (12)$$

mais
$$\begin{cases} \tau_c^l = \sigma_{ij} M_{ij}^l = \sigma_{ij}^* M_{ij}^l + \bar{\sigma}_{ij} M_{ij}^l \\ \sigma_{ij} dM_{ij}^l = dM_{ij}^l (\sigma_{ij}^* + \bar{\sigma}_{ij}) \end{cases}$$

d'où :

$$d(\delta T) = \sum_1 \underbrace{(\delta\gamma^l \, [d\tau_c^l - \sigma_{ij} \, dM_{ij}^l - M_{ij}^l \, d\bar{\sigma}_{ij}]}_{I} + \underbrace{d(\delta\gamma^l) \, [d\tau_c^l - \sigma_{ij} \, dM_{ij}^l - M_{ij}^l \, d\bar{\sigma}_{ij}])}_{II} \qquad (13)$$

D'après RENOUARD et WINTENBERGER [34] le terme II de l'expression (13) est minimum ou stationnaire lorsque le critère de continuité des glissements est respecté. Par exemple, dans le modèle de TAYLOR lorsque la déformation est complètement imposée ce critère est toujours respecté pour des déformations plus ou moins petites. Dans ce cas, la solution réelle minimise par rapport aux $\delta\gamma^l$ le premier terme de l'expression (13) pour l'énergie de déformation plastique de second ordre $d(\delta T)$:

$$d(\delta T) = \sum_1 \delta\gamma^l \, (d\tau_c^l - \sigma_{ij} \, dM_{ij}^l - M_{ij}^l \, d\bar{\sigma}_{ij}) \qquad (14)$$

La minimisation doit tenir compte des p relations linéaires (6) entre les amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ et les déformations imposées $\delta\bar{e}_{ij}$. A première vue, l'expression (14) de $d(\delta T)$ est une forme quadratique des amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ (car $dM_{ij}^l = f(\delta\gamma^l)$ voir Annexe 3) mais récemment, M. WINTENBERGER [23] a montré que $d(\delta T)$ est une forme linéaire et non quadratique ce que nos expériences *(Chapitre III)* avaient préalablement suggérée. Ceci permet de simplifier les calculs des $\delta\gamma^l$.

Dans le cas où les composantes imposées du tenseur des contraintes sont nulles ($\bar{\sigma}_{ij} = 0$ et $d\bar{\sigma}_{ij} = 0$) l'expression de $d(\delta T)$ à minimiser devient :

$$d(\delta T) = \sum_1 \delta\gamma^l \, (d\tau_c^l - \sigma_{ij}^* \, dM_{ij}^l) \qquad (15)$$

Par la suite, d'autres auteurs ont proposé un critère d'énergie minimale du second ordre et l'ont appliqué notamment aux résultats d'essais de traction sur monocristaux de haute symétrie, HAVNER [35], FRANCIOSI et ZAOUI [36].

CHAPITRE II

TECHNIQUES EXPERIMENTALES ET METHODES DE CALCUL

II.1 - DISPOSITIF DE COMPRESSION PLANE.

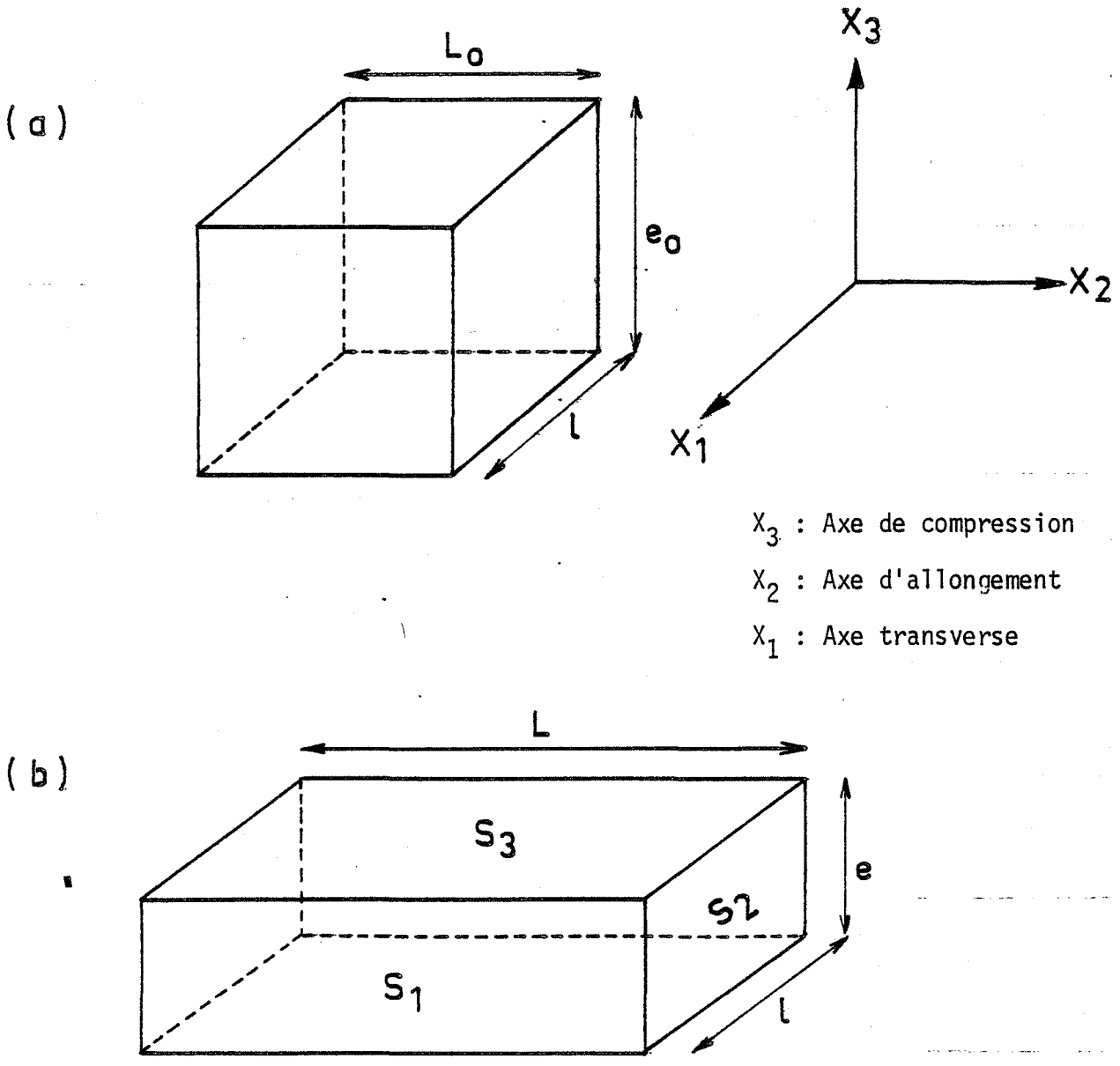
II.1.1 - INTRODUCTION

Lors du laminage d'un matériau polycristallin isotrope, on peut considérer que la déformation est une compression plane caractérisée par $\overline{\varepsilon}_{22} = -\overline{\varepsilon}_{33}$ les autres composantes de la déformation étant toutes nulles *(Fig. 14)*. Un essai de compression plane, pour simuler ce mode de déformation, consiste à imposer une déformation homogène de compression suivant l'axe X_3 à un échantillon qui s'allonge dans la direction X_2, en empêchant la déformation transverse. En principe, un tel essai sur monocristaux présente l'avantage de pouvoir imposer des déformations plastiques importantes afin de "simuler" le comportement de cristaux, dans un agrégat polycristallin, en laminage.

Dans ce but, des études de compression plane de cristaux C.F.C. ont été menées sur divers métaux et alliages par de nombreux auteurs ; CHIN, NESBITT et WILLIAMS [16] (monocristaux de Permalloy 4% Mo-17% Fe-79% Ni) ; HOSFORD (Al) [17] ; WONSIEWICZ et CHIN (Cu-Al ; Ag-Sn) [38] ; AGRAWAL et HOSFORD (Al-4% Cu) [39] ; et plus récemment par KOCKS et CHANDRA (Al) [40].

Deux types de dispositifs de compression plane ont été utilisés pour déformer des monocristaux :

- Le premier qui comporte deux poinçons *(Fig. 15a)*, utilisés par HOSFORD, présente deux inconvénients :
  - *Il nécessite beaucoup de matière qui reste inutilisée sauf dans la zone comprimée*
  - *Le déplacement suivant la direction transverse X_1 n'est pas totalement empêché.*



X_3 : Axe de compression

X_2 : Axe d'allongement

X_1 : Axe transverse

FIGURE 14- Déformation en compression plane

(a) Echantillon avant déformation ;

(b) Après déformation, $\overline{\varepsilon} \simeq 0{,}68$

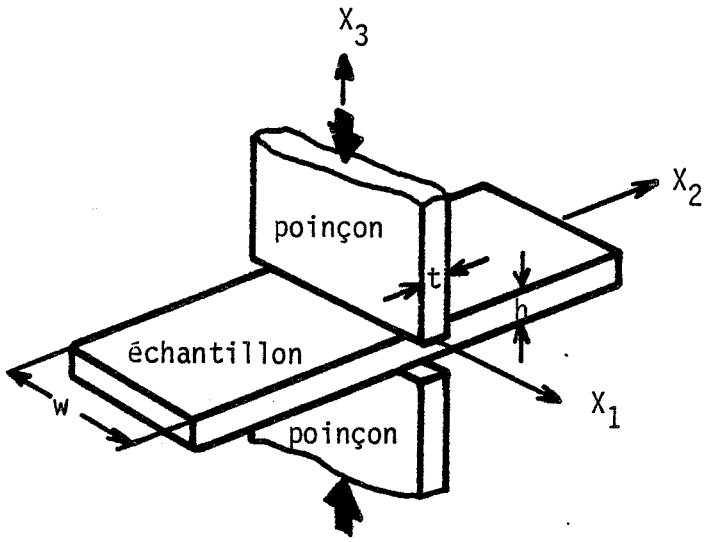


FIGURE 15a - Dispositif de compression plane "de Hosford" W >> t

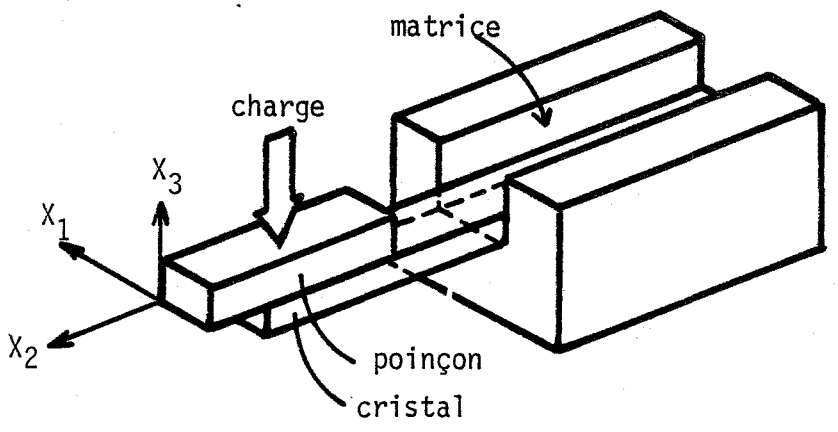
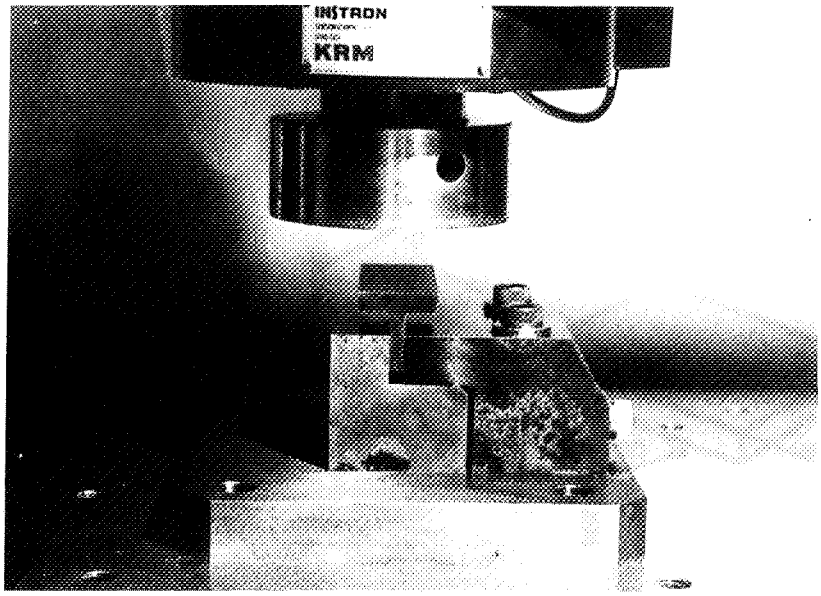


FIGURE 15b - Dispositif de compression plane "de Chin"

(a)



(b)

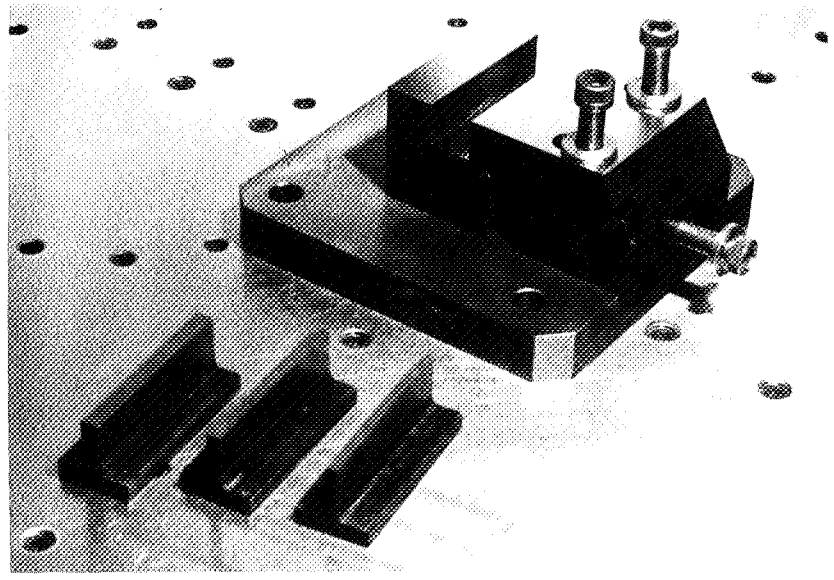


FIGURE 16 - Dispositif de compression plane utilisé

- Le second dispositif comportant un poinçon et une matrice *(Fig. 15b)*, mis au point par CHIN [16] permet de mieux contrôler la déformation suivant la direction transverse X_1.

II.1.2 - DISPOSITIF DE COMPRESSION PLANE UTILISE.

SERPOUL et DRIVER [41] ont apporté une modification à l'appareil de CHIN afin de pouvoir effectuer des essais sur échantillons de largeurs différentes. Ceci a donné naissance à un dispositif simple *(Fig. 16)* réalisé à l'aide d'une matrice de largeur variable et de poinçons de 5,7 ou 10 mm de large. C'est ce dernier dispositif que nous avons utilisé pour l'étude de la compression plane des monocristaux d'aluminium. L'expansion latérale $\bar{\varepsilon}_{11}$ est pratiquement nulle puisque pour des valeurs de compression rationnelle de l'ordre de $\bar{\varepsilon} = 1$, nous avons toujours $|\bar{\varepsilon}_{11}| < 0{,}02$. La déformation rationnelle $\bar{\varepsilon}$ pour la compression plane est définie par :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{22} = -\bar{\varepsilon}_{33} = \ln \frac{e}{e_o} = \ln \frac{L}{L_o}$$

e_o et L_o étant respectivement l'épaisseur et la longueur initiales de l'échantillon, e et L son épaisseur et sa longeur variables au cours de la déformation.

L'appareil est en acier pratiquement indéformable (90MCV8, trempé à l'huile à 800°C et revenu à 150°C, dureté finale : 62HRC). Il est fixé sur une machine de traction-compression INSTRON de 250 KN *(Fig. 16a)*. La vitesse de déplacement de la traverse utilisée au cours de l'essai est de 0,05 cm/mn.

II.1.3 - CONDITIONS LIMITES DES DIFFERENTS ESSAIS.

L'échantillon, placé dans la matrice *(Fig. 17a)*, est comprimé selon l'axe de compression X_3 et s'allonge dans le couloir selon l'axe X_2. Avec

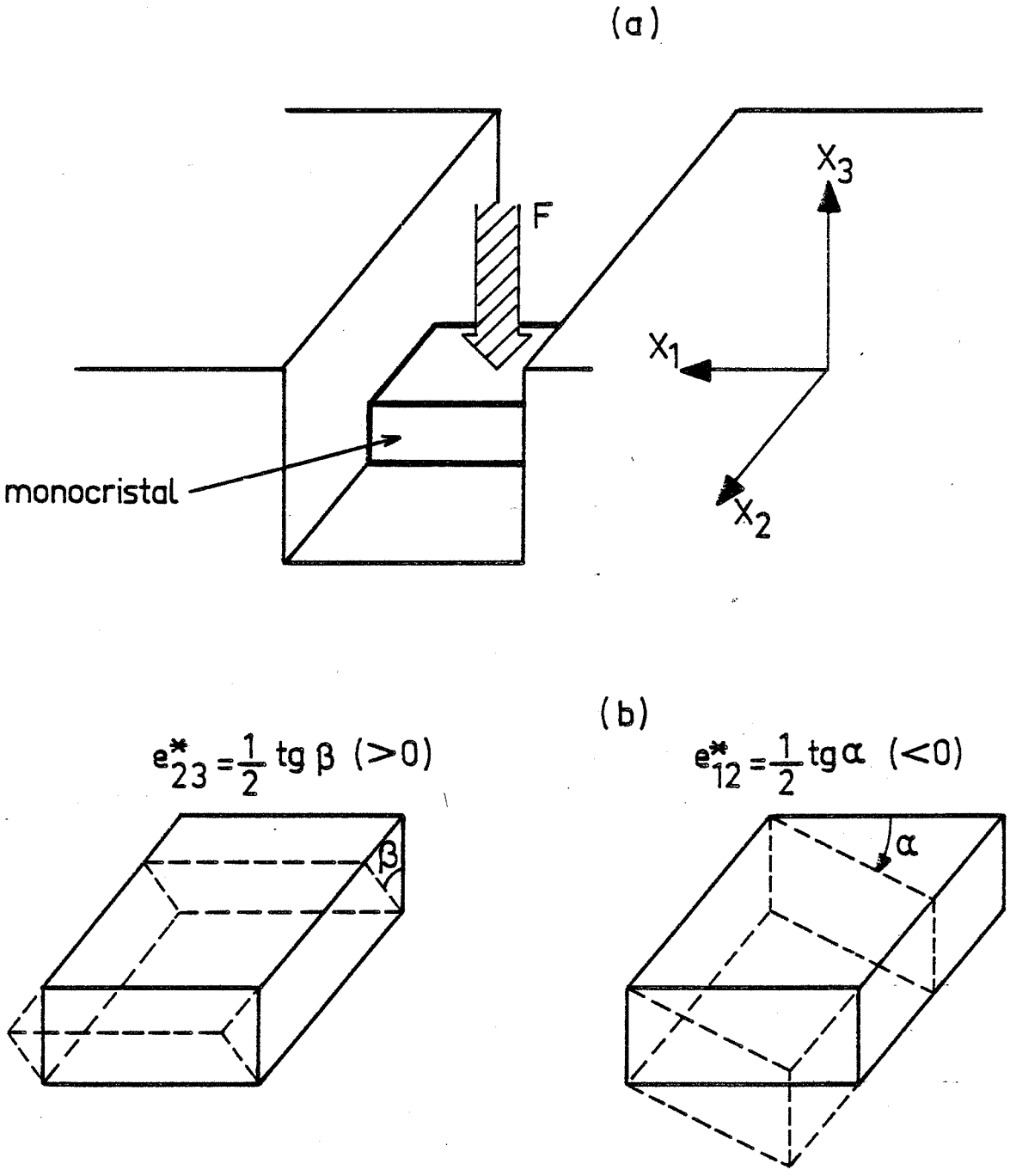


FIGURE 17 - Schéma de l'essai de compression plane d'un monocristal partiellement encastré.

(a) Schéma du dispositif de compression plane

(b) Possibilités de cisaillement en compression plane

cette technique, rien n'empêche un échantillon monocristallin de subir des cisaillements le long du couloir de la matrice *(Fig. 17b)*. Dans ce cas, la déformation n'est pas complètement déterminée ; les déformations indépendantes imposées sont au nombre de trois ($\bar{e}_{11} = \bar{e}_{13} = 0$ et $\bar{e}_{22}$) et deux composantes de cisaillement e^*_{12} et e^*_{23} sont libres. C'est un essai en conditions mixtes à trois composantes de déformation imposées. L'amplitude des cisaillements dépend de l'orientation de l'échantillon et de la déformation rationnelle $\bar{\varepsilon}$. *La figure 18a* montre l'exemple de deux monocristaux d'orientations différentes déformés en compression plane, le premier n'a pratiquement pas de cisaillement e^*_{12} alors que le second a subi un fort cisaillement e^*_{12}.

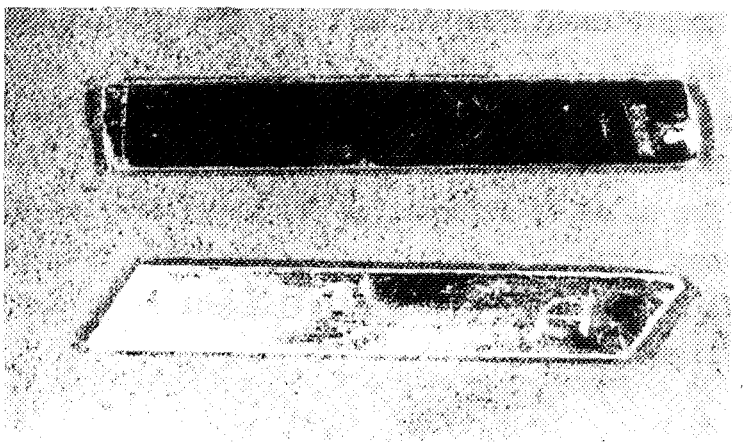
Afin d'imposer une compression plane "pure" (sans cisaillements) nous avons mis au point une technique originale [42] de compression plane de cristaux encastrés entre deux autres cristaux dont l'orientation est symétrique par rapport aux plans normaux à X_2.

Le cristal à tester est rendu solidaire aux deux extrémités, correspondant à la direction d'allongement X_2, de deux cristaux de même composition chimique, dont les cisaillements e^*_{21} et e^*_{23} seraient si les cristaux n'étaient pas solidaires, d'amplitudes égales mais de signes opposés aux cisaillements du cristal central. Les deux cristaux d'encastrement sont de même orientation que le cristal central mais tournés de π autour d'un axe X_1, X_2, ou X_3 par rapport à ce dernier. Le principe de la technique s'explique par les propriétés de symétrie du cristal. *La figure 19* montre, en deux dimensions, qu'une rotation du cristal central B (initialement de même orientation que A et C) de π autour de l'axe X_2 remplit la condition sur les cisaillements, de sorte que lorsque les cristaux A, B et C sont solidaires, la déformation de l'ensemble conduit à l'élimination mutuelle des cisaillements e^*_{21} (B) et e^*_{21} (A) par incompatibilité. En trois dimensions, la rotation de π autour de l'axe X_2 permet également d'éliminer le cisaillement e^*_{23} ; les cinq termes indépendants du tenseur des déformations plastiques du cristal central sont alors complètement imposés. De plus si l'on recherche à imposer quatre termes indépendants du tenseur de déformation $[\varepsilon]$ en n'éliminant que l'un des deux cisaillements e^*_{21} ou e^*_{23}, il suffit de tourner le cristal central de π autour de l'axe X_1 ou X_3:

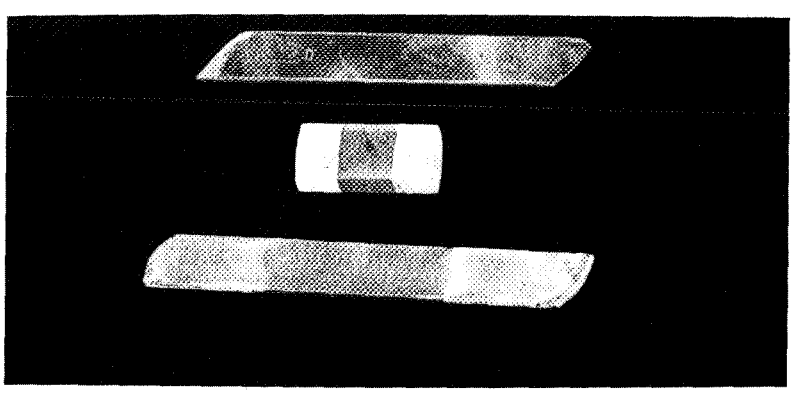
- *une rotation de π autour de l'axe X_3 supprime e^*_{23} mais pas e^*_{21} et*

(i)

(ii)



(a) Monocristaux libres, avec et sans cisaillement déformés en compression plane à $\bar{\varepsilon} \simeq 1$. Orientations initiales :
(i) (110) [00$\bar{1}$]
(ii) (110) [$\bar{1}$0 10 1]



(b) Monocristal libre et tricristal incompatible avant et après déformation. Orientation initiale ≃ (110) [$\bar{1}$1$\bar{1}$] ; $\bar{\varepsilon} \simeq 1$.

FIGURE 18 - Monocristaux libres et tricristaux.

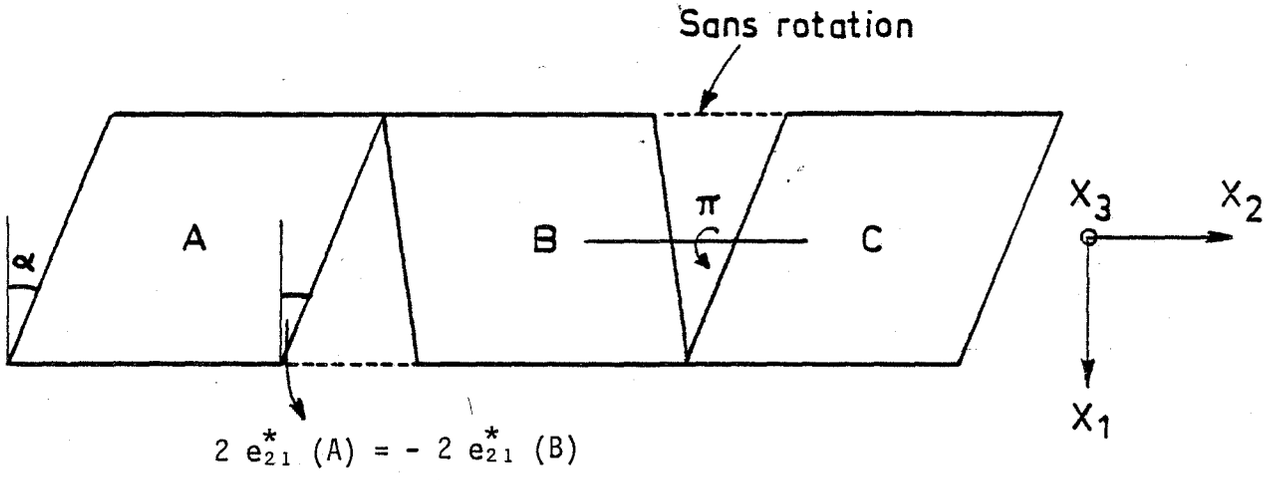


FIGURE 19 - Schéma en deux dimensions de la relation d'orientation entre le cristal central (B) et les cristaux d'encastrement (A et C) qui permet d'éliminer le cisaillement e^*_{21} (B).

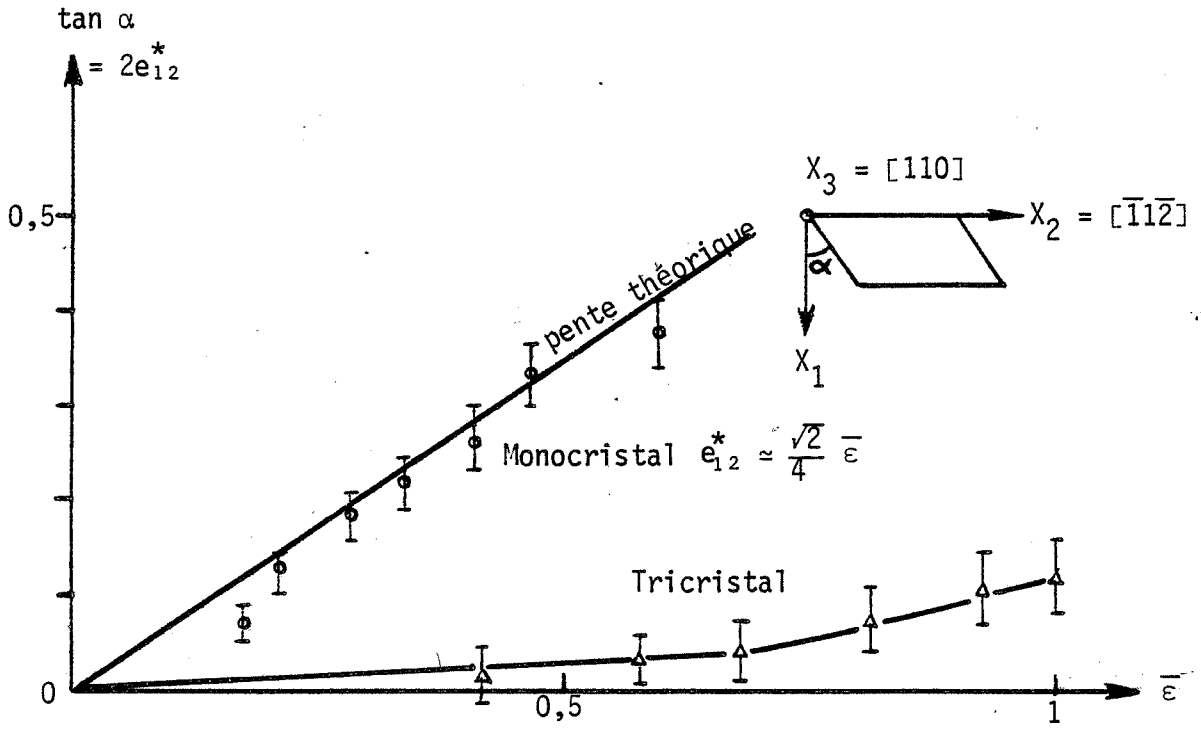


FIGURE 20 - Cisaillement expérimental e^*_{12} du monocristal et du tricristal d'orientation initiale ≃ (110) [1̄12̄]

- *une rotation de* π autour de l'axe X_1 supprime e^*_{21} *mais pas* e^*_{23}.

L'ensemble de trois cristaux orientés A, B et C, par ces opérations de symétrie sera appelée "tricristal symétrique incompatible".

La figure 20 présente les résultats expérimentaux des cisaillements e^*_{12} du monocristal non encastré et e^*_{12} du tricristal d'orientation initiale $\sim$ (110) $[\bar{1}1\bar{2}]$. On remarque que pour le tricristal, le cisaillement e^*_{12} est pratiquement supprimé. *La figure 18b* montre clairement la différence de mode de déformation entre le monocristal libre et le monocristal encastré par deux autres cristaux de même orientation $\sim$ (110) $[\bar{1}1\bar{2}]$.

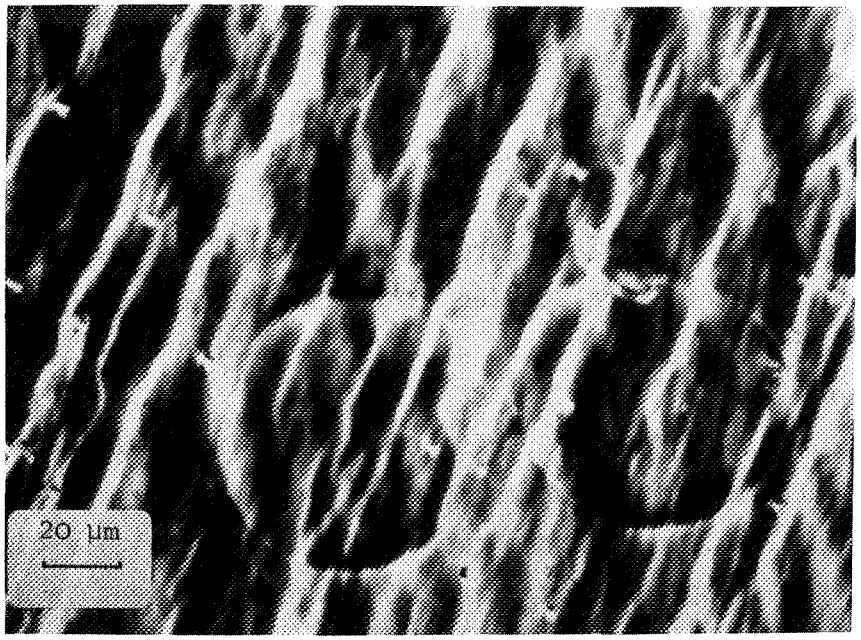
Nous avons aussi vérifié l'homogénéité de la déformation dans le cristal central par l'observation des traces des plans de glissement aux joints de grains et au centre.

La figure 21 montre bien que les glissements du cristal central au centre et aux joints sont identiques. En fait nous avons constaté une légère inhomogénéité de la déformation, sur $\simeq$ 0,3 mm, le long des 2 autres bords de la face comprimée : la fraction volumique du cristal central déformé de manière homogène est > 90%.

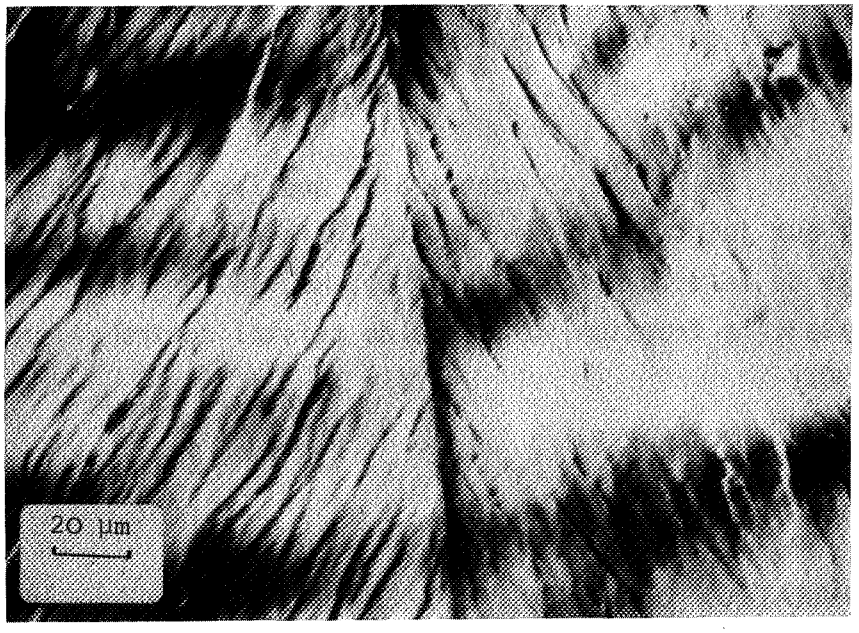
II.2 - PRÉPARATION DES EPROUVETTES.

Nous avons utilisé deux types d'éprouvettes cristallines :

- *Les monocristaux libres pour étudier les cas des conditions mixtes (contraintes et déformations imposées).*
- *Les tricristaux (monocristaux de mêmes orientations complètement encastrés entre deux autres cristaux) pour étudier les cas où toutes les composantes du tenseur des déformations sont imposées.*



(a) Cristal central, face X_3



(b)

Cristal central

Cristal de bord

FIGURE 21 - Traces des plans de glissement observées à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}34$ sur la face de compression X_3 de l'orientation initiale ≃ (110) $[1\bar{1}2]$

(a) cristal central

(b) joint de grains entre le cristal central et un cristal de bord

II.2.1 - ELABORATION DE MONOCRISTAUX ET DE TRICRISTAUX ORIENTES D'ALUMINIUM

Les barreaux d'aluminium monocristallins et tricristallins utilisés au cours de cette étude sont élaborés à partir d'aluminium superrafiné 99,996% (principaux éléments d'impuretés : 4 ppm Fe ; 9 ppm Si et 3 ppm Cu) par la méthode de solidification dirigée en nacelle horizontale. Il s'agit de solidifier, à partir d'un germe orienté dans une direction donnée, un lingot métallique fondu en nacelle horizontale.

Le germe tricristallin est obtenu, à partir d'un monocristal de l'orientation désirée, par découpage en trois parallélépipèdes le long de l'axe du cristal X_1 *(Fig. 22)*, suivi d'une rotation du parallélépipède central de π autour de l'axe voulu (par exemple l'axe X_2 pour éliminer à la fois les deux cisaillements e^*_{12} et e^*_{23}). A partir de ce germe, le barreau tricristallin est élaboré comme pour les monocristaux par solidification dirigée. Ensuite les barreaux monocristallins et tricristallins de dimensions : longueur $\sim$ 140 mm, épaisseur $\sim$ 6 mm et largeur $\sim$ 20 mm, sont découpés en tranches (plan de découpage X_2X_3, *voir figure 22)* afin d'obtenir des éprouvettes monocristallines et tricristallines de compression plane. Notons que cet échantillon original permet, pour la première fois, de tester le comportement d'un cristal dans le cas où toutes les composantes du tenseur de déformation sont imposées de façon homogène.

II.2.2 - PREPARATION DES EPROUVETTES

Les éprouvettes sont prélevées dans les barreaux monocristallins ou tricristallins. Pour obtenir des éprouvettes ayant une forme parallélépipédique de dimensions : épaisseur $\sim$ 4,5 mm ; largeur 7 $\pm$ 0,01 mm ; longueur 10 à 15 mm, nous avons adopté le découpage électrolytique. Cette technique présente l'avantage de ne pas écrouir le matériau mais rend pratiquement impossible le découpage d'éprouvettes géométriquement correctes (faces parallèles et perpendiculaires, surfaces parfaitement planes et dimensions exactes). Pour avoir des éprouvettes parallélépipédiques, nous pratiquons un polissage manuel au papier fin afin de ramener les dimensions de l'échantillon à 0,1 mm de la côte finale. Nous terminons la préparation par un polissage électrolytique (acide acétique : 9 vol. ; acide perchlori-

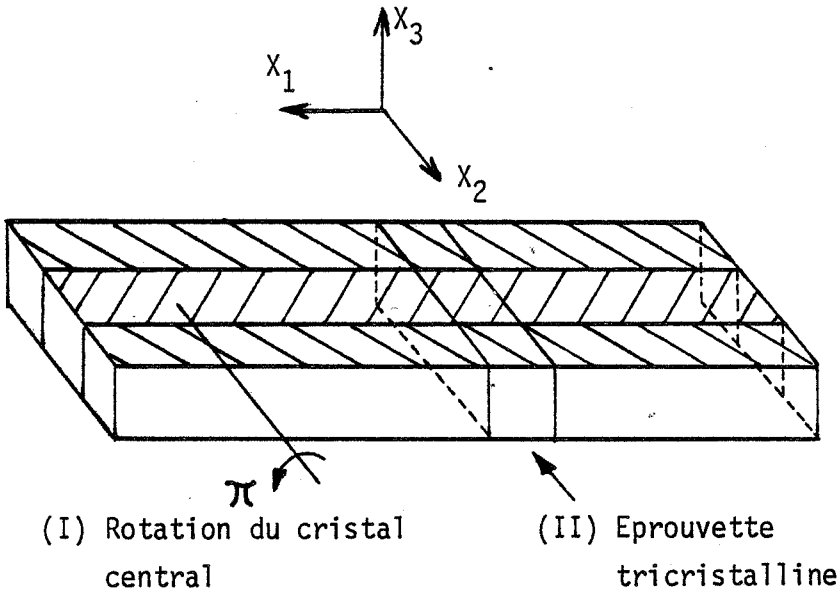


FIGURE 22 - Technique de préparation d'une éprouvette tricristalline

drique : 2 vol.) qui permet d'avoir d'une part les dimensions exactes voulues, et d'autre part un bon état de surface à nos échantillons.

Pour contrôler l'orientation initiale de nos éprouvettes, nous avons utilisé la méthode de Laüe en retour avec une précision de mesure de l'ordre du degré.

II.3 - REALISATION DE L'ESSAI DE COMPRESSION PLANE.

II.3.1 - PROBLEME DES FROTTEMENTS ECHANTILLON-MATRICE

Afin de réduire les frottements échantillon-matrice-poinçons, nous avons utilisé de minces films de Téflon (0,05mm d'épaisseur) qui lubrifient toutes les surfaces de contact autour de l'échantillon.

Le frottement pouvant jouer un rôle important dans les contraintes appliquées à l'échantillon, nous avons cherché à en apprécier son importance sur des échantillons polycristallins, en faisant varier la surface comprimée (S_3) de l'échantillon *(Fig. 14b)*. En effet, en première approximation, le frottement est proportionnel à la surface de contact et à la contrainte imposée. Si le frottement perturbe fortement l'état de contrainte, celui-ci doit varier avec la surface de l'échantillon. Nous avons alors testé en compression plane 3 échantillons de polycristaux d'aluminium de même pureté, de même taille de grain ($\sim$ 1 mm) (Revenu 1/2 h à 450°C), mais de longeurs différentes. *La figure 23* montre que les trois courbes de compression rationnelle ainsi obtenues sont très proches l'une de l'autre. Ceci montre que la surface de l'échantillon comprimé et donc le frottement n'est pas un paramètre important dans les conditions habituelles de nos essais.

II.3.2 - CONDUITE DE L'ESSAI SUR CRISTAUX

Avant déformation, une grille est tracée, à l'aide d'un diamant à rayures, parallèlement aux axes X_1, X_2 et X_3, sur l'une des surfaces de compression et sur une surface transverse des échantillons mono et tricristallins.

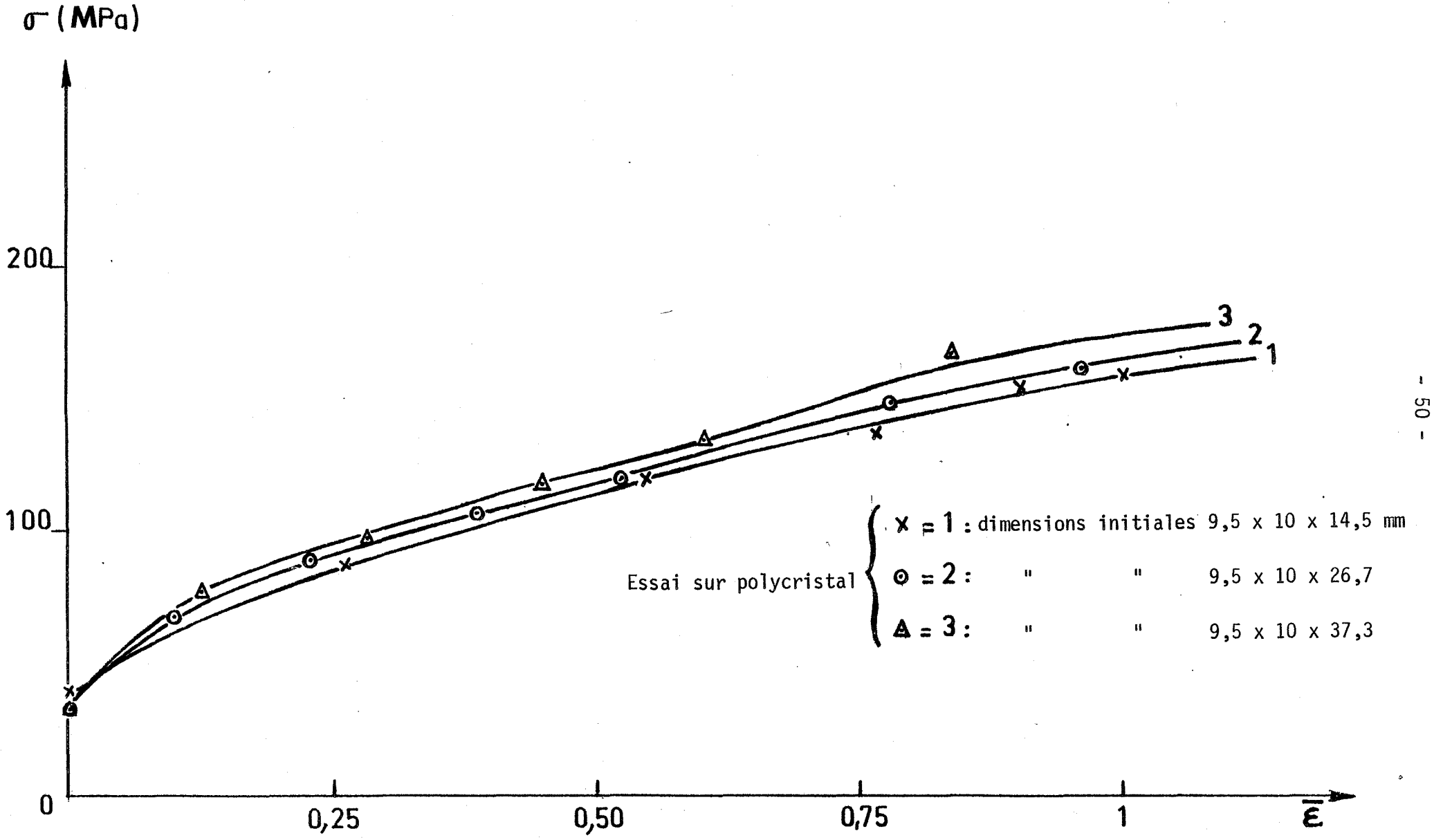


FIGURE 23 - Influence de la taille des échantillons sur les courbes contrainte-déformation de l'aluminium polycristallin.

L'espacement de la grille est de l'ordre de 2 mm. Elle permet de mesurer les déformations non imposées e^*_{12} et e^*_{23} au cours de la déformation à l'aide des angles α et β *(Fig. 17b)* et de contrôler l'homogénéité de la déformation.

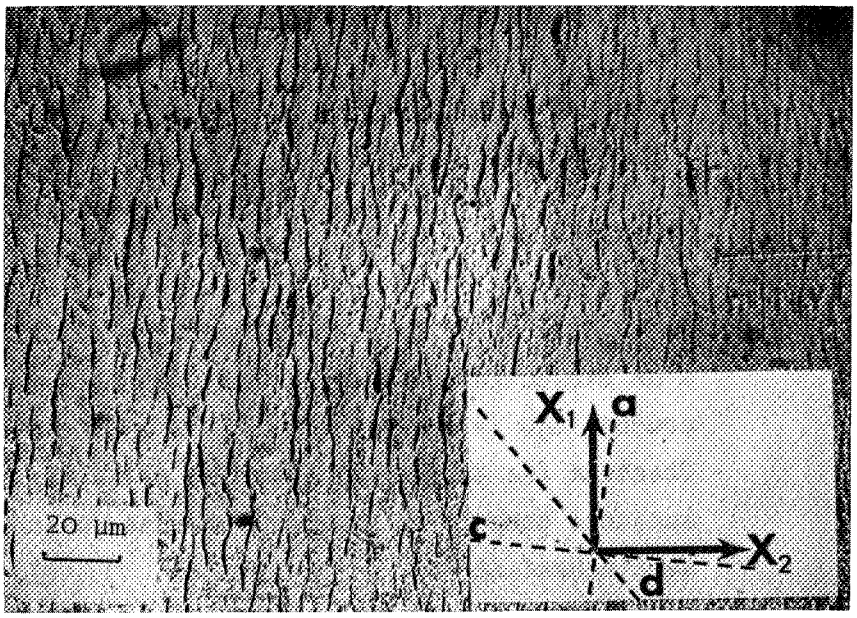
L'essai est interrompu périodiquement à des intervalles de déformation rationnelle d'environ 0,1 pour :

- *Mesurer les dimensions de l'échantillon à l'aide d'un palmer (précision de l'ordre de 1/100 mm).*
- *Relever la forme de l'échantillon et de la grille, à l'aide d'un projecteur de profil, ceci nous permet de tracer les courbes* $tg\alpha$ $(= 2\ e^*_{12})$ *et* $tg\beta$ $(= 2\ e^*_{23})$ *en fonction de* $\bar{\varepsilon}$.
- *Observer les traces des plans de glissement sur l'une des surfaces comprimées et sur l'une des surfaces transverses de l'échantillon.*
- *Mesurer la nouvelle orientation du cristal.*
- *Renouveler le film de Téflon.*

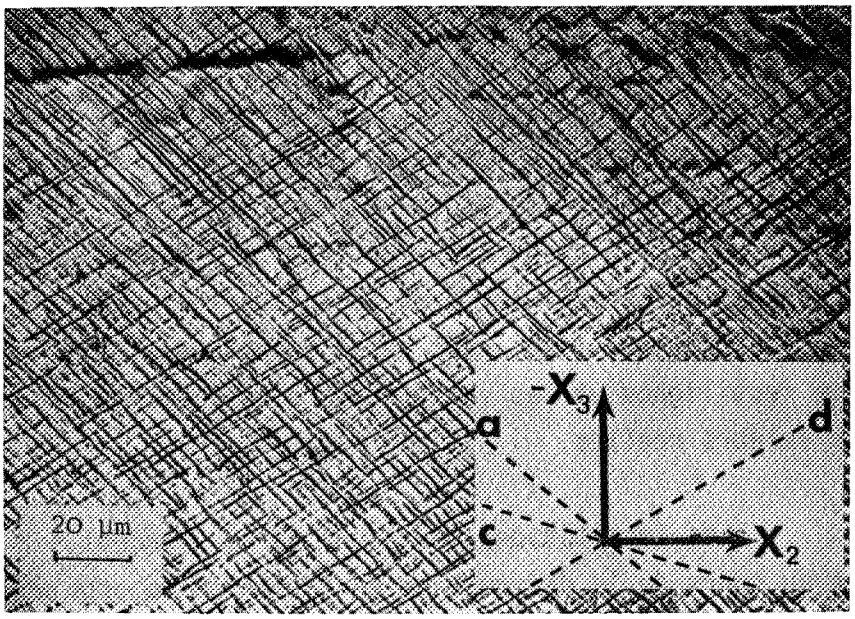
Pour certains des premiers échantillons monocristallins testés, nous avons constaté que la déformation devenait inhomogène au cours de l'essai ; les lignes de la grille deviennent courbées. En effet, l'apparition des cisaillements importants e^*_{12} et e^*_{23} introduisent apparamment un état de contrainte inhomogène. De ce fait, les conditions initiales ne sont plus respectées et par conséquent, les valeurs mesurées de e^*_{12} et e^*_{23} ne sont qu'approximatives. Par la suite, pour rendre la déformation plus homogène nous avons effectué, à chaque arrêt, un polissage mécanique pour ramener la forme de l'échantillon parallélépipédique (en enlevant les bords cisaillés). Avec cette technique, les lignes du repère restent presque rectilignes et les valeurs des cisaillements mesurées se rapprochent plus des valeurs réelles.

Les incertitudes de mesure de e^*_{12} tendent à augmenter de 0,02 à 0,05 environ au cours de la déformation en raison de ce problème de l'homogénéité de la déformation. L'incertitude sur le cisaillement e^*_{23}, initialement du même ordre de grandeur 0,02, augmente de façon plus importante jusqu'à 0,1 à $\bar{\varepsilon} = 1$ à cause de la diminution importante de l'épaisseur.

L'essai est conduit de cette façon jusqu'à une déformation rationnelle de l'ordre de 1,5. Ceci représente une valeur limite pour la défor-



Face - X_3



Face X_1

FIGURE 24 - Traces des plans de glissement observées à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}56$ sur la face de compression $(-X_3)$ et sur la face transverse (X_1). Orientation initiale TD ≃ (112) $[15\bar{3}]$

mation du fait de l'imprécision des mesures pour des épaisseurs très faibles (< 1 mm).

II.3.3 - OBSERVATION DES PLANS DE GLISSEMENT

Afin de révéler clairement les traces des plans de glissement correspondant à un taux de déformation donné, pour des déformations rationnelles > 0,2, l'échantillon est repoli électrolytiquement puis recomprimé légèrement ($\delta\varepsilon \simeq 0{,}05$). Les traces des plans de glissement sont observées, sur les faces de compression et sur les faces transverses, au microscope optique et comparées aux traces théoriques des 4 plans {111} *(Fig. 24)*. Notons que l'observation d'un plan $\vec{n}$ ne permet pas de définir les directions de glissement $\vec{b}$.

II.3.4 - MESURE DES ORIENTATIONS CRISTALLINES

Les orientations cristallines sont déterminées à l'aide des rayons-X, par la méthode de Laüe en retour pour des déformations rationnelles $\bar{\varepsilon} < 0{,}25$ (précision de l'ordre du degré). Au delà de ce taux de déformation, il y a apparition d'un astérisme considérable sur le film de Laüe rendant ainsi toute mesure d'orientation par ce moyen très imprécise. Pour les déformations rationnelles plus importantes ($\bar{\varepsilon} > 0{,}3$), nous utilisons la méthode de l'analyse des figures de pôles qui donne des résultats avec une précision de ± 1° à ± 5°, selon la largeur des pics de diffraction. L'aire de l'échantillon balayée par les rayons -X est de 2 mm^2 environ. Les figures de pôles {220} nous sont fournies par un analyseur de textures informatisé et tracées automatiquement par un enregistreur digital à l'aide d'une technique réalisée à l'E.M.S.E. par R. FILLIT. Un exemple de l'évolution des pôles {220}, lors du laminage d'un grain dans une tôle d'aluminium, est présenté à la *figure 25* ainsi que son dépouillement à la *figure 26*.

Les orientations notées (hkl) [uvw] sont déterminées par les angles que font respectivement X_3 et X_2 avec les axes du cube <100>.

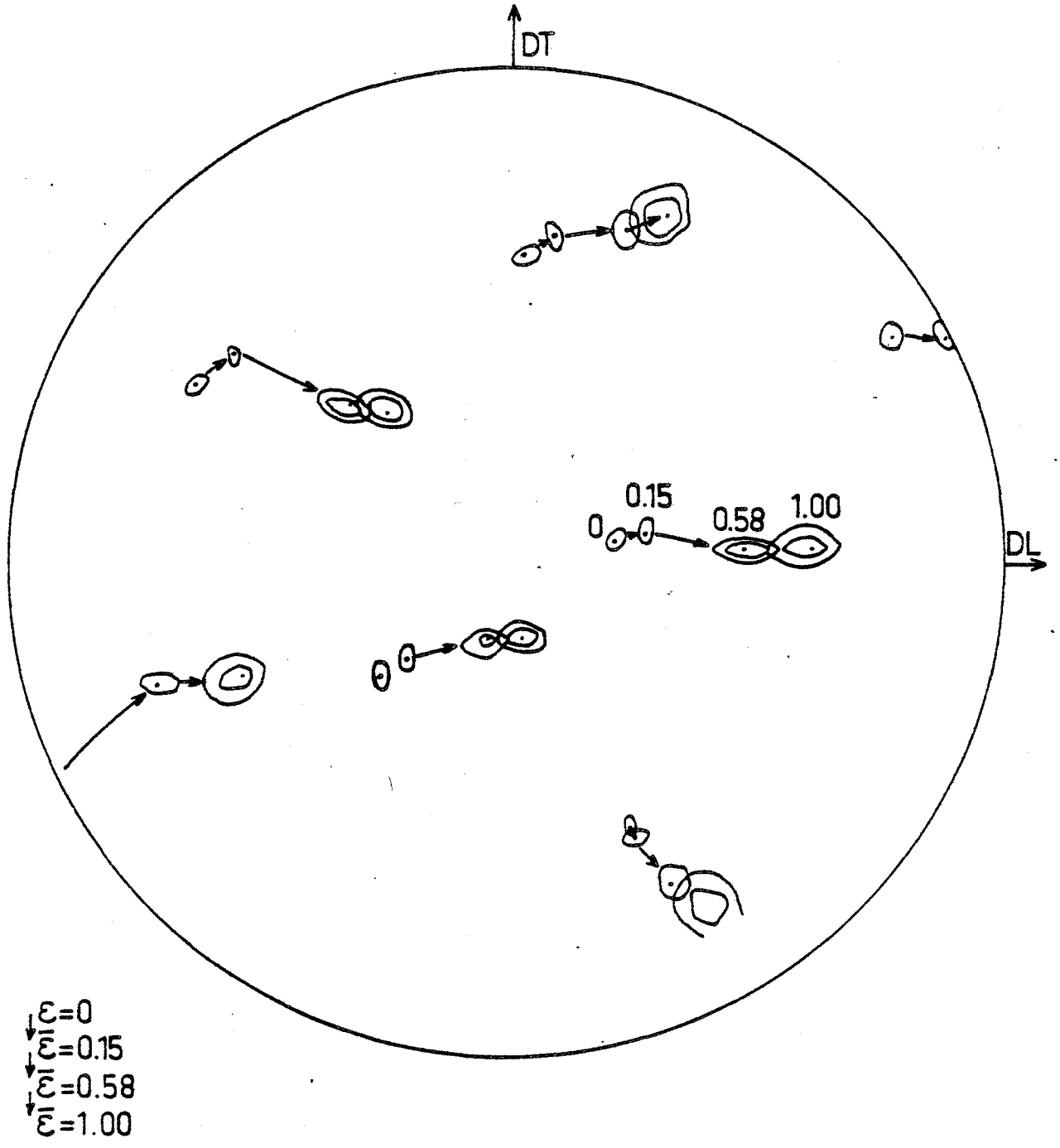


FIGURE 25 - Figure de pôle {220} du grain 58 d'une tôle d'aluminium laminée à différentes déformations $\bar{\varepsilon}$, orientation initiale ≃ (349) [$\bar{4}9\bar{3}$]

II.4 - METHODES DE CALCUL.

Nous détaillerons ici les méthodes de calculs utilisées au cours de notre étude pour simuler la compression plane de cristaux C.F.C. en déformations importantes, soit complètement imposées soit partiellement imposées. Nous cherchons à déterminer, pour une déformation donnée, l'état de contraintes, les amplitudes de glissement "réelles", les rotations cristallines et dans le cas des conditions mixtes, les déformations non-imposées. Ces calculs sont basés sur les critères d'énergie de déformation plastique du premier et de second ordre décrits au chapitre I.

II.4.1 - DEFORMATION COMPLETEMENT IMPOSEE

II.4.1.1 - APPLICATION DE LA METHODE DE BISHOP ET HILL A LA COMPRESSION PLANE PURE.

Si le cristal est encastré pour éliminer d'éventuels cisaillements la déformation sera une compression plane pure caractérisée par les termes $\bar{\varepsilon}_{22} = -\bar{\varepsilon}_{33}$ ($= j\delta\bar{e}_{22}$) toutes les autres composantes du tenseur des déformations $[\varepsilon]$ étant nulles.

Dans le repère outil, le tenseur des déplacements infinitésimaux imposés [D] est :

$$[D] = \delta\,\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rappelons que $\delta\varepsilon$ est un incrément de déformation rationnelle : $\delta\varepsilon = \ln \frac{e}{e_0}$.

Dans ce cas, le tenseur des déformations imposées $[\varepsilon]$ est égal à celui des déplacements imposés [D]. Aucune des composantes du tenseur des contraintes $[\sigma]$ n'est imposée.

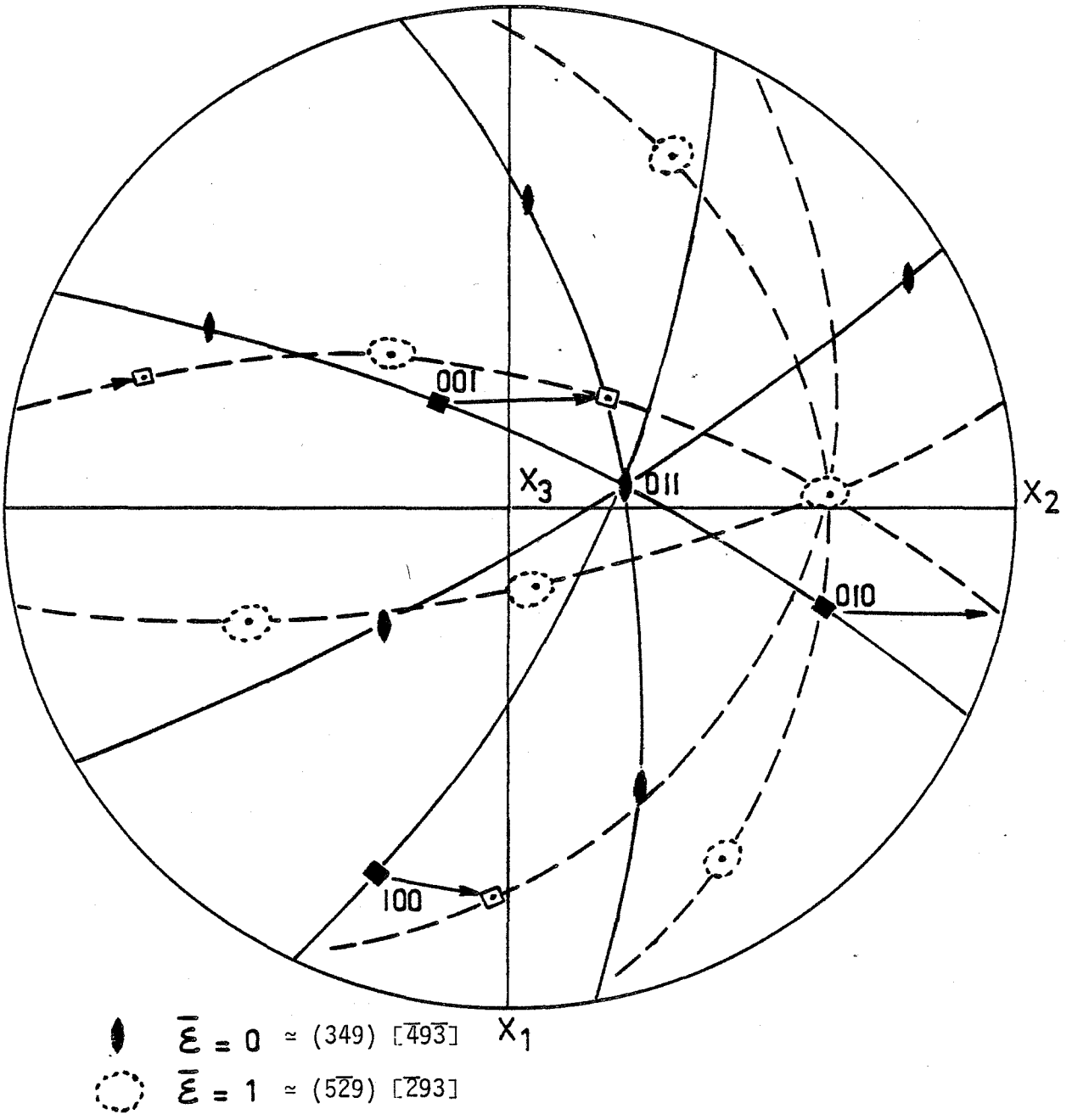


FIGURE 26- Dépouillement des figures de pôles {220} du grain 5 B d'une tôle laminée en fonction de la déformation ($\bar{\varepsilon}$ = 0 et 1), voir fig. 25.

La contrainte σ^*_{33} correspond à la force appliquée sur la surface réelle de l'échantillon. Les composantes non imposées σ^*_{ij} sont calculées, en général sans indétermination, par la méthode du travail plastique (δT) maximal :

$$\delta T = \sum_{i,j} \sigma^*_{ij}\ \delta\varepsilon_{ij} = \sigma^*_{22}\ \delta\bar{e}_{22} + \sigma^*_{33}\ \delta\bar{e}_{33} = (\sigma^*_{33} - \sigma^*_{22})\ \delta\bar{e}_{22}$$

Le cacul s'effectue dans le repère axes du cube ($\delta\varepsilon_{kl} = a_{ki}\ a_{lj}\ \delta\varepsilon_{ij}$; a_{ij} étant la matrice de passage du repère (X_1, X_2, X_3) au repère axes du cube <100>) à l'aide du tableau de BISHOP des 56 états de contraintes possibles. En principe la contrainte hydrostatique $\sigma_H = \frac{1}{3}(\sigma^*_{11} + \sigma^*_{22} + \sigma^*_{33})$ n'influe pas sur δT. Pour nos calculs, nous avons pris σ_H telle que $\sigma^*_{22} = 0$ car on pense que les contraintes d'écoulement σ^*_{22} des cristaux (A,B) et (B,C) doivent s'annuler mutuellement *(Fig. 19)*. Les systèmes de glissement à l'état critique(n)correspondant au travail plastique maximal sont relevés directement du même tableau de BISHOP *(voir Annexe 1)*. On trouve toujours n = 6 ou 8 systèmes pour les orientations quelconques. Ceci conduit à une indétermination des amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ *(voir Chapitre I)* et donc de la rotation cristalline qui est définie, pour le cas de la compression plane pure, par :

$$[R] = [D] - [G]' = \begin{bmatrix} 0 & -\delta g_{12} & -\delta g_{13} \\ -\delta g_{21} & 0 & -\delta g_{23} \\ -\delta g_{31} & -\delta g_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} r_1 = -\ \delta g_{32} \\ r_2 = \ \ \delta g_{31} \\ r_3 = \ \ \delta g_{12} \end{cases}$$

Cette rotation, comme nous l'avons décrit au chapitre I, n'est pas complètement indéterminée. Il est possible de calculer les valeurs extrêmes des rotations en choisissant, pour chaque incrément de déformation, une paire de solutions extrêmes (repérées 1 et 2) parmi toutes les paires de

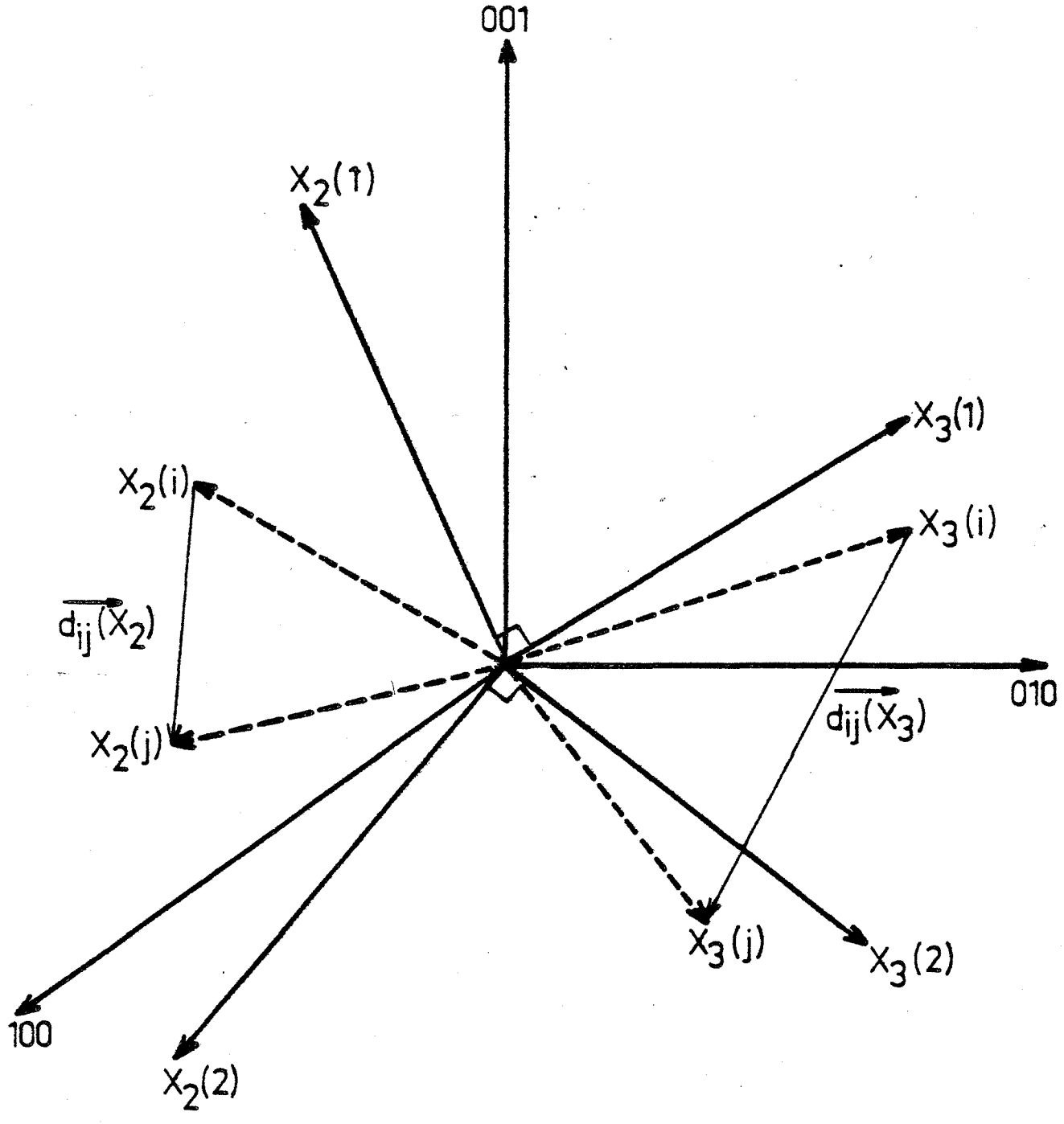


FIGURE 27 - Choix d'une paire (1,2) de "solutions extrèmes" de BISHOP et HILL

solutions possibles (i et j) *(Fig. 27)*. Nous avons pris comme solution extrême (1,2) celle qui rend maximale la quantité :

$$\{\vec{dij}\ (X_3)\}^2 + \{\vec{dij}\ (X_2)\}^2$$

ce terme représente l'écart moyen des orientations possibles, $\vec{dij}\ (X_3)$ et $\vec{dij}\ (X_2)$ étant les vecteurs des déplacements (dans le repère <100>) entre les nouvelles orientations possibles de X_3 et de X_2. Un programme de calcul des solutions extrêmes de BISHOP et HILL, pour des déformations infinitésimales successives, a été mis au point par R. FORTUNIER [19]. Il faut souligner que le choix de deux solutions extrêmes comporte toujours un certain caractère arbitraire lorsque l'indétermination est d'ordre 3.

II.4.1.2 - CALCUL DE MINIMISATION DE dT.

Pour lever l'indétermination des $\delta\gamma^l$, nous avons utilisé la méthode de RENOUARD et WINTENBERGER, c'est-à-dire, la solution réelle pour les $\delta\gamma^l$ minimise l'énergie de déformation plastique de second ordre *(voir chapitre I)*.

Pour nos calculs de minimisation de l'énergie de second ordre (expression (13) du chapitre I), nous avons fait deux hypothèses :

- *Ce sont les mêmes systèmes de glissement qui restent à l'état critique dans chaque incrément de déformation qu'on impose pour le calcul. Ceci permet de négliger le terme II de l'expression (13).*
- *La consolidation $d\tau_c^l$ de chaque système l est identique pour tous les systèmes ($d\tau_c^l$ = Cste) et donc n'influe pas sur la minimisation. Ceci revient à supposer un écrouissage isotrope, ce qui paraît raisonnable, du moins pour l'aluminium en déformations importantes avec des glissements multiples* [39].

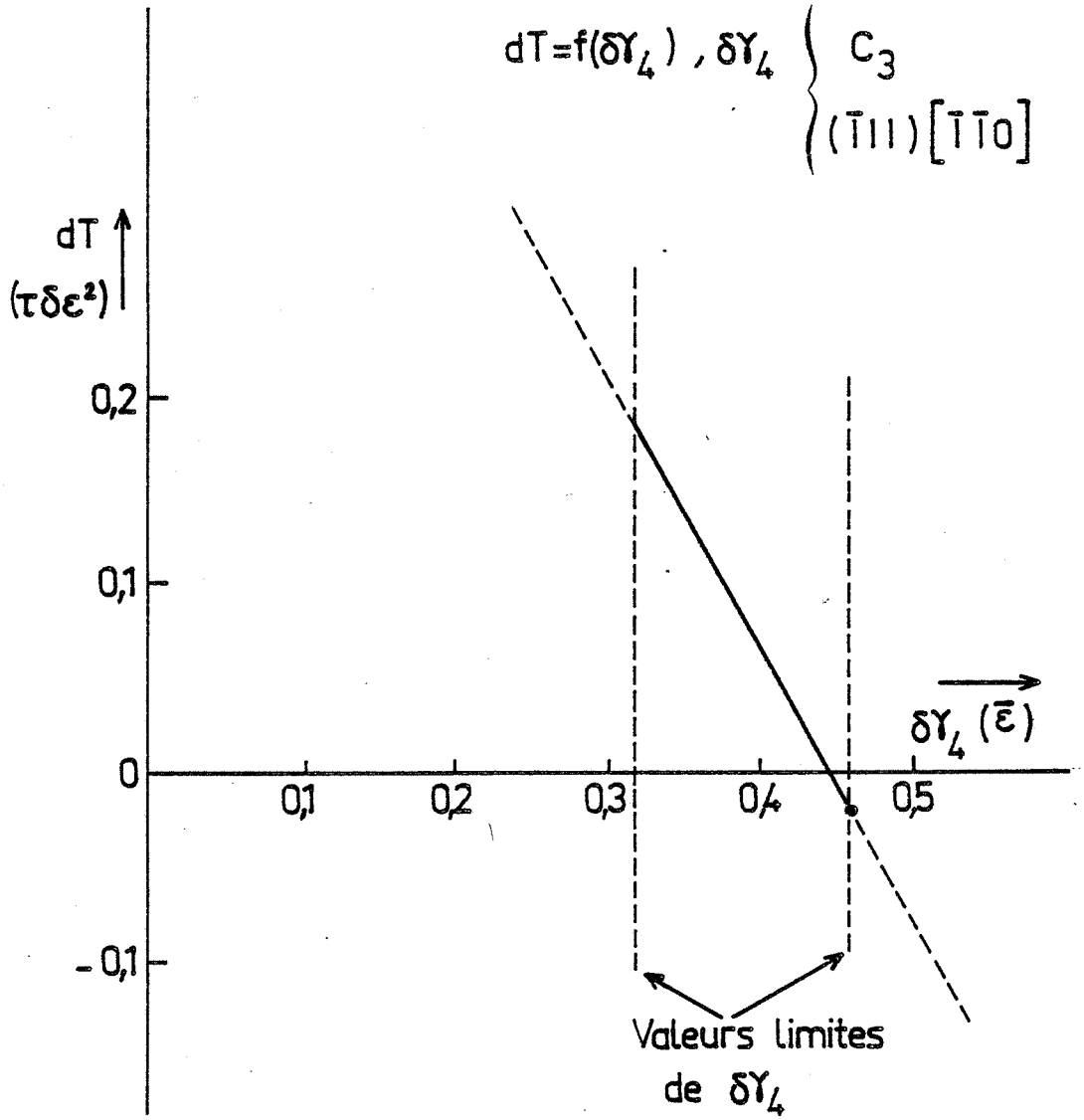


FIGURE 28 - Courbes $dT = f(\delta\gamma_4)$ du monocristal d'orientation initiale $\simeq (583)\ [8\bar{3}5]$

Avec ces hypothèses supplémentaires, il suffit alors de minimiser :

$$d(\delta T) = - \sum_{i,j} \sum_{l} \sigma_{ij} \, \delta\gamma^{l} \, dM^{l}_{ij} \qquad (16)$$

Rappelons que pour nos essais, les termes imposés du tenseur des contraintes sont tous nuls. Pour simplifier l'écriture, nous désignons $d(\delta T)$ par dT.

Lorsque l'indétermination des amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ est d'ordre 1 (5 termes $\delta\bar{e}_{ij}$ indépendants et n = 6), à l'aide des relations (6) entre les $\delta\gamma^l$, on peut exprimer $\delta\gamma^l$, la rotation r_i et la variation de l'énergie de la déformation plastique dT en fonction d'une seule inconnue ($\delta\gamma^i$), et tracer dT en fonction de cette inconnue. *La figure 28* montre un exemple particulier de cette fonction pour l'orientation proche de (583) [$\bar{8}\bar{3}\bar{5}$] qui, dans ce cas est linéaire. Le minimum de dT, pour cet exemple, correspond à une valeur limite de $\delta\gamma(C_3)$ (amplitude du système C_3) choisie comme inconnue, soit $\delta\gamma(C_3) \simeq 0{,}46 \, \delta\varepsilon$ avec $dT \simeq -0{,}027 \, \tau\epsilon\delta\varepsilon^2$. Les autres valeurs de $\delta\gamma^l$ sont alors complètement déterminées et le problème théorique est résolu. Il faut signaler que dans le cas de l'indétermination d'ordre 1, la forme de la courbe $dT = f(\delta\gamma^i)$ est en général linéaire. Dans le cas d'une indétermination d'ordre 3 (8 systèmes de glissement à l'état critique), dT est calculé en fonction de trois $\delta\gamma^l$ et son minimum déterminé par les méthodes classiques de minimisation.

Pour raccourcir les temps de calcul, nous avons mis sur ordinateur (Mini 6 - 53, Mod 600) le calcul numérique des valeurs des $\delta\gamma^l$ qui correspondent au minimum de dT, à l'aide d'un programme [43 - 46] qui permet de minimiser la fonction quadratique simplifiée (16) tout en respectant les relations linéaires (6) entre les $\delta\gamma^l$. Ce programme utilise une méthode dérivée de la programmation linéaire classique. La solution est un point stationnaire d'une fonction Lagrangienne.

En résumé, ce programme fournit pour une itération correspondant à un incrément de déformation $\delta\varepsilon$:

- *L'état de contrainte* [σ] *(calculé par la méthode de BISHOP et HILL selon l'hypothèse du travail* δT *maximal).*

- *Les systèmes de glissement à l'état critique (en général 6 ou 8).*
- *L'expression de dT sous forme matricielle (voir Annexe 3).*
- *Les valeurs de $\delta\gamma^l$ qui minimisent dT.*
- *Les rotations cristallines théoriques r_{ij} (expression (9) - Chapitre I).*
- *La nouvelle orientation théorique après un pas de déformation $\delta\varepsilon$ calculée à l'aide de la matrice de rotation finie :*

$$\begin{bmatrix} R_1^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & R_1R_2(1-\cos\theta) - R_3\sin\theta & R_1R_3(1-\cos\theta) + R_2\sin\theta \\ R_1R_2(1-\cos\theta) + R_3\sin\theta & R_2^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & R_2R_3(1-\cos\theta) - R_1\sin\theta \\ R_1R_3(1-\cos\theta) - R_2\sin\theta & R_2R_3(1-\cos\theta) + R_1\sin\theta & R_3^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \end{bmatrix}$$

(R_1, R_2, R_3) étant les composantes du vecteur rotation normalisé et θ est l'angle de la rotation = $\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}$

L'ensemble du calcul est répété j fois pour calculer les rotations cristallines lors d'une déformation plastique importante $\bar{\varepsilon} = j\delta\varepsilon$.

II.4.2 - DEFORMATIONS PARTIELLEMENT IMPOSEES.

II.4.2.1 - CALCUL DE L'ETAT DE CONTRAINTES.

Le dispositif décrit à la *figure 17a* empêche les déplacements perpendiculaires à la direction transverse (X_1) ce qui entraine $\bar{d}_{11} = \bar{d}_{12} = \bar{d}_{13} = 0$,

et dans la direction de compression (X_3) ne permet qu'un déplacement homogène, soit $\overline{d}_{31} = \overline{d}_{32} = 0$. Sur la face perpendiculaire à la direction de l'allongement (X_2), qui est libre, les trois composantes de la contrainte doivent être nulles ($\sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$).

D'où :

le tenseur des déplacements [D] (dans le repère outil)

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d^*_{21} & -\overline{d}_{22} & d^*_{23} \\ 0 & 0 & \overline{d}_{33} \end{bmatrix}$$

le tenseur des déformations [ε] ($\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} + d_{ji})$) :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \delta e^*_{12} & 0 \\ \delta e^*_{12} & +\delta\varepsilon & \delta e^*_{23} \\ 0 & \delta e^*_{23} & -\delta\varepsilon \end{bmatrix} \qquad \text{avec } \delta\varepsilon = \delta\overline{e}_{22}$$

le tenseur de contraintes [σ] :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma^*_{11} & 0 & \sigma^*_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma^*_{13} & 0 & \sigma^*_{33} \end{bmatrix}$$

Les trois déformations indépendantes imposées sont $\delta\overline{e}_{33}$ (où $\delta\overline{e}_{22} = -\delta\overline{e}_{33}$ par conservation du volume) et $\delta\overline{e}_{11} = \delta\overline{e}_{13} = 0$. On voit que

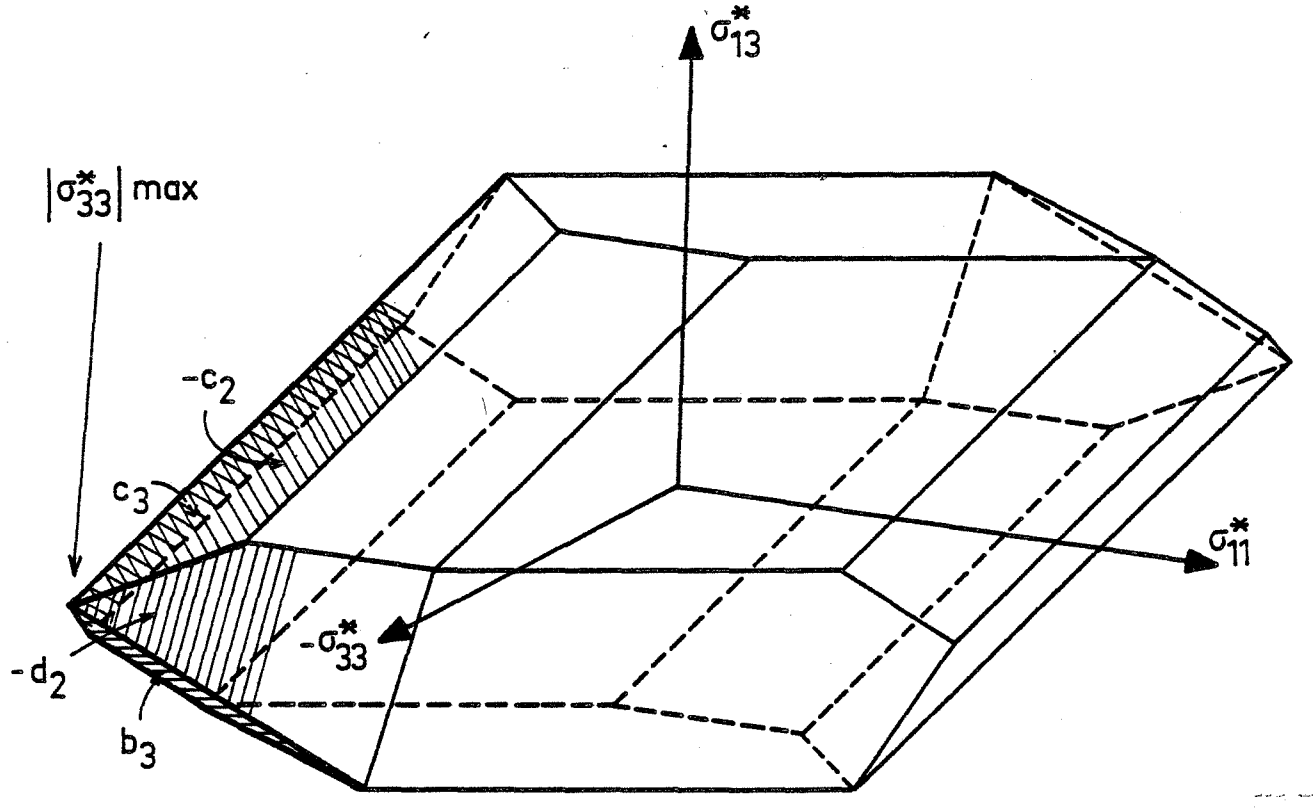


FIGURE 29 - Polyèdre critique du monocristal d'orientation initiale
MC ≃ (121) [$\bar{3}$11]

pour chaque couple (i,j), soit $\delta\varepsilon_{ij}$, soit σ_{ij} est imposée en accord avec l'analyse du problème des conditions mixtes traité par RENOUARD et WINTENBERGER [11].

L'état de contraintes, d'après la relation (1), doit vérifier la loi de SCHMID et BOAS, pour les systèmes à l'état critique :

$$\tau_c^l = \sum_{i,j} \sigma_{ij} M_{ij}^l$$

Pour déterminer les systèmes de glissement à l'état critique correspondant à une orientation donnée du monocristal, nous avons utilisé la méthode de RENOUARD et WINTENBERGER [11] qui est une généralisation de la méthode de BISHOP et HILL. La solution réelle rend maximale le travail des forces extérieures non imposées.

Les états de contraintes possibles peuvent être présentés sous forme de polyèdre critique dans l'espace défini par les valeurs possibles des trois composantes σ_{11}^*, σ_{13}^* et σ_{33}^* *(Fig. 29)*. Ce polyèdre critique, qui équivaut à une "surface d'écoulement" du cristal est obtenu en résolvant 3 à 3 les 24 équations (1) du type :

$$\pm \tau_c^k = \sigma_{11}^* M_{11}^k + 2\sigma_{13}^* M_{13}^k + \sigma_{33}^* M_{33}^k$$

Pour les cristaux C.F.C., 24 équations sont nécessaires pour les 12 systèmes de glissement {111} <110> possibles pris avec $\pm \tau_c^k$. Chaque solution $(\sigma_{11}^*, \sigma_{13}^*, \sigma_{33}^*)$ correspond à un sommet possible du polyèdre critique ; il y a $C_{24}^3 = 2024$ sommets possibles. Parmi tous les sommets possibles, les solutions $(\sigma_{11}^*, \sigma_{13}^*, \sigma_{33}^*)$ qui se trouvent en dehors des facettes les plus proches du centre du repère sont éliminées ; les solutions restantes définissent le polyèdre critique. Notons qu'une facette du polyèdre correspond à un système de glissement, sauf pour les orientations de haute symétrie où elle peut correspondre à plusieurs systèmes.

Les lignes d'intersection des facettes sont ensuite déterminées et tracées en projection sur un traceur digital dans l'espace (σ^*_{11}, σ^*_{13}, σ^*_{33}). *La figure 29* représente un exemple de polyèdre critique pour l'orientation initiale $\sim$ (121) [$\bar{3}$11].

Les systèmes de glissement à l'état critique sont donnés directement par les facettes du polyèdre critique qui forment le sommet pour lequel $|\sigma^*_{33}|$ est maximal ($\sigma^*_{33} < 0$). En effet, pour ce mode de déformation, le travail des forces extérieures non imposées $\delta T = \sum_{i,j} \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij} = - \sigma^*_{33}\delta\bar{\varepsilon}$ puisque les autres termes sont nuls. A titre d'exemple, pour le polyèdre critique de l'orientation $\sim$ (121) [$\bar{3}$11] *(Fig. 29)* quatre systèmes sont à l'état critique : b_3, $-c_2$, c_3 et $-d_2$ dans la notation de BISHOP [14] *(Tableau 1)*.

Ce genre de calcul a été appliqué, indépendemment de nos travaux, mais pratiquement de la même façon au cas de la compression plane de monocristaux C.F.C. par KOCKS et CHANDRA [40].

II.4.2.2 - DEFORMATIONS NON IMPOSEES e^*_{12} ET e^*_{23} ET ROTATION CRISTALLINE.

D'après nos calculs des σ_{ij} pour ce mode de déformation, le nombre n des systèmes de glissement susceptibles de glisser, c'est-à-dire ceux pour lesquels la cission résolue vaut τ_c est en général de 3 ou 4. Le nombre de composantes indépendantes imposées de la déformation plastique n'étant que 3 ($\delta\bar{e}_{13}$, $\delta\bar{e}_{22}$ et $\delta\bar{e}_{11}$), il y a alors, lorsque n = 4, indétermination d'ordre 1 des amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ dans les trois équations :

$$\delta\bar{e}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \delta\gamma^l\, M^l_{ij}$$

Comme pour le cas de la compression plane pure, l'indétermination des $\delta\gamma^l$ entraine celle des déplacements dûs aux glissements δg_{ij}

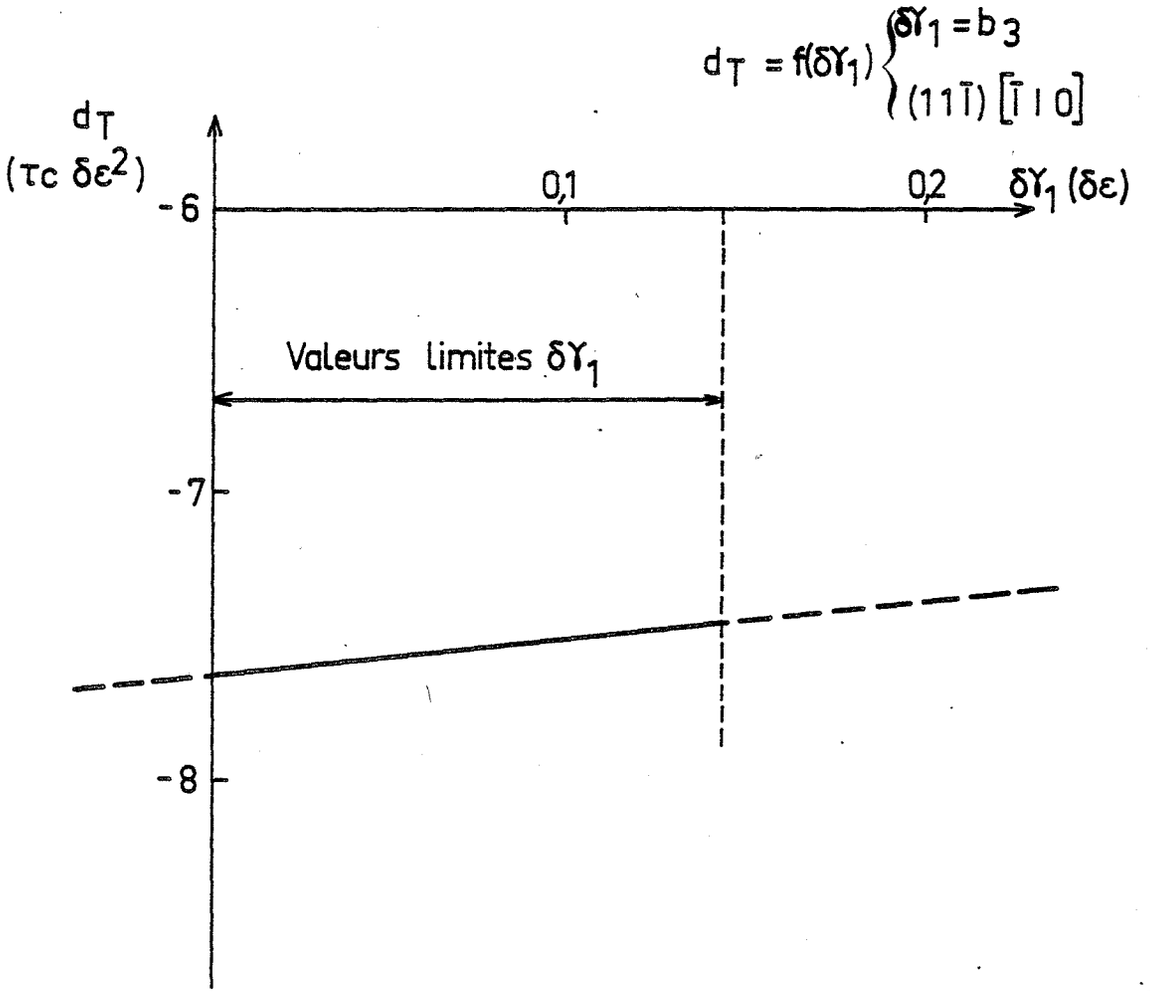


FIGURE 30 - Courbes $dT = f(\delta\gamma_1)$ pour l'orientation initiale ≃ (121) [$\bar{3}$11] déformée en compression plane partiellement imposée.

(d'après [8]). Par conséquent, les cisaillements non imposés δe^*_{12} et δe^*_{23} (respectivement $\sum_{l=1}^{n} \delta\gamma^l M^l_{12}$ et $\sum_{l=1}^{n} \delta\gamma^l M^l_{23}$) et la rotation du réseau cristallin sont également indéterminés.

Les composantes r_i de la rotation sont, d'après [9] :

$$\begin{cases} r_1 = \bar{d}_{32} - \delta g_{32} = - d^*_{23} + \delta g_{23} = - \delta g_{32} \\ r_2 = \bar{d}_{13} - \delta g_{13} = - \bar{d}_{31} + \delta g_{31} = - \delta g_{13} \quad \text{(dans le repère outil)} \\ r_3 = d^*_{21} - \delta g_{21} = - \bar{d}_{12} + \delta g_{12} = \delta g_{12} \end{cases}$$

Ces indéterminations ne sont pas totales dans la mesure où les signes des $\delta\gamma^l$ sont connus (et pris positifs) permettant ainsi de préciser des valeurs limites des $\delta\gamma^l$, de δe^*_{ij} et de r_i.

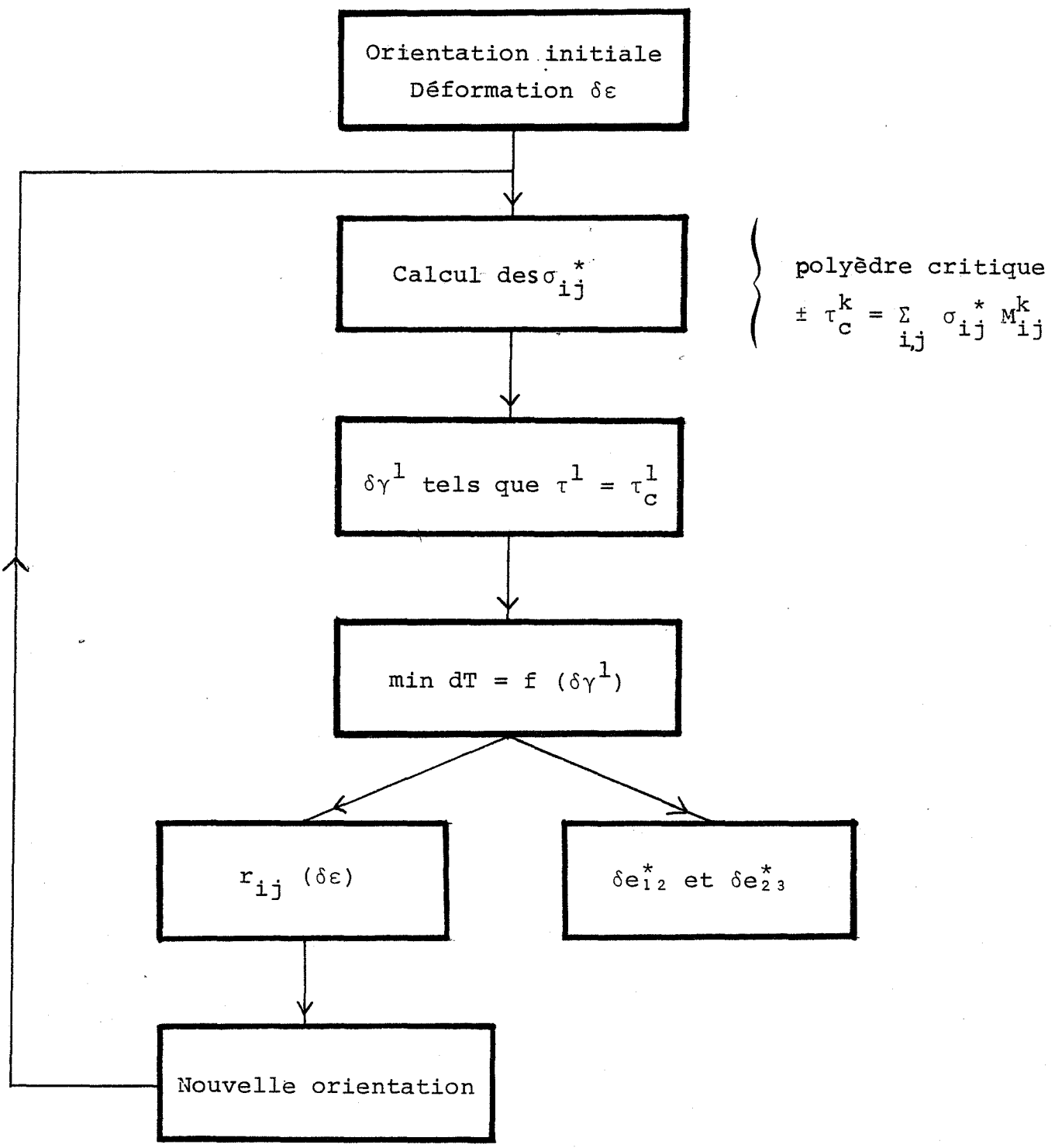
Pour lever l'indétermination, nous avons appliqué l'hypothèse du minimum de dT exactement de la même façon que pour le cas de la compression plane pure, avec les mêmes hypothèses de continuité des glissements et d'écrouissage isotrope.

Si l'indétermination est de d'ordre 1 (3 $\delta\varepsilon_{ij}$ indépendants imposés et n = 4), on peut calculer l'expression pour la variation de l'énergie plastique dT en fonction d'un des $\delta\gamma^l$. Un exemple de ces fonctions est présenté à la *figure 30*, ainsi que les valeurs limites de $\delta\gamma^l$.

II.4.2.3 - ORGANIGRAMME DU CALCUL.

Le calcul s'effectue sur ordinateur suivant l'organigramme de la *figure 31* comme pour le cas de la compression plane pure sauf que nous calculons, à chaque itération i : (1) l'état des contraintes $[\sigma]$ par la méthode décrite au paragraphe II.4.2.1 et (2) les deux cisaillements non imposés $\delta e^*_{12}(i)$ et $\delta e^*_{23}(i)$.

Figure 31 : Organigramme du calcul théorique des rotations et des cisaillements non imposés pour la compression plane partiellement imposée.



INCREMENT DE DEFORMATION	ORIENTATIONS à $\varepsilon = 0$	$\bar{\varepsilon} = 0,2$			$\bar{\varepsilon} = 0,5$			$\bar{\varepsilon} = 1$		
		ORIENTATION	e^*_{12}	e^*_{23}	ORIENTATION	e^*_{12}	e^*_{23}	ORIENTATION	e^*_{12}	e^*_{23}
0,02	(44 78 47) [$\overline{90}$ 32 31]	($\overline{17,4}$ 81,9 56,8) [$\overline{98,2}$ 06,9 20,1]	-0,029	-0,08	($\overline{02,9}$ 80,1 61,6) [$\overline{99,3}$ $\overline{11,2}$ 09,7]	-0,042	-0,086	($\overline{02,9}$ 77,1 65,4) [$\overline{98,8}$ $\overline{13,7}$ 11,7]	-0,013	-0,169
0,05	(44 78 47) [$\overline{90}$ 32 31]	($\overline{16,4}$ 81,8 57,1) [$\overline{98,3}$ 05,8 19,8]	-0,03	-0,087	($\overline{02,9}$ 79,9 61,9) [$\overline{99,2}$ $\overline{11,5}$ 10]	-0,043	-0,096	($\overline{01,7}$ 77 65,6) [$\overline{98,7}$ $\overline{13,1}$ 12,7]	-0,013	-0,182
0,1	(44 78 47) [$\overline{90}$ 32 31]	($\overline{14,3}$ 81,6 58) [$\overline{98,5}$ 03,3 19,5]	-0,035	-0,101	($\overline{00,4}$ 79,6 62,4) [$\overline{99,1}$ $\overline{10,4}$ 12,6]	-0,044	-0,112	($\overline{01,4}$ 76,4 66,3 [$\overline{98,6}$ $\overline{13,5}$ 13,4]	-0,0113	-0,200

TABLEAU I : Influence du pas de déformation sur les orientations et les cisaillements théoriques d'un cristal d'orientation initiale ∿ (121) [$\overline{3}$11].

Le calcul est recommencé j fois pour simuler une déformation importante $\bar{\varepsilon} = j\delta\varepsilon$ avec des pas de déformation $\delta\varepsilon = 0{,}05$ ou $0{,}1$. Pour une déformation importante $j\delta\varepsilon$ les angles théoriques α et β sont donnés par :

$$tg\alpha = 2e^*_{12} = 2 \sum_{i=1}^{j} \delta e^*_{12}(i) \quad ; \quad tg\beta = 2e^*_{23} = 2 \frac{\sum_{i=1}^{j} (\delta e^*_{23}(i) e_i)}{e_j}$$

Ces définitions tiennent compte du fait que la largeur reste constante mais que l'épaisseur est variable, e_i étant l'épaisseur après une déformation $i\delta\varepsilon$.

Pour apprécier l'erreur introduite par le pas de déformation, nous avons fait, pour le cas de la compression plane partiellement imposée, les caculs théoriques itératifs jusqu'à $\bar{\varepsilon} = 1$, avec différentes valeurs du pas $\delta\varepsilon$: 0,02, 0,05 et 0,1. Pour deux orientations calculées (dont les rotations théoriques sont $\sim 10°$ et $40°$ respectivement), les résultats théoriques étaient pratiquement indépendants du pas choisi, d'une part pour les orientations et d'autre part sur les cisaillements. *Le tableau I* montre un exemple de la façon dont varient les orientations théoriques en fonction du pas de déformation choisi. On constate que l'écart entre ces différentes valeurs théoriques est très faible. Ceci conduit à considérer l'erreur introduite par les pas de déformation utilisés pour nos calculs comme étant du même ordre de grandeur que l'erreur expérimentale.

Ainsi à chaque étape du calcul, les valeurs théoriques des paramètres importants, qui caractérisent complètement la déformation plastique sont précisées et peuvent être confrontées aux résultats expérimentaux.

CHAPITRE III

RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX EN COMPRESSION PLANE

L'objectif de nos essais sur cristaux est de confronter les théories de la déformation de cristaux (basées sur les critères énergétiques décrits au premier chapitre) avec les résultats expérimentaux. Nous présenterons dans ce chapitre les résultats obtenus sur des cristaux d'aluminium superrafinés 99,996 %, d'une part dans le cas de la compression plane partiellement imposée (à l'aide de monocristaux) et d'autre part dans le cas de la compression plane parfaitement imposée (à l'aide de tricristaux). De plus, deux essais en déformation partiellement imposée ont également été effectués sur des monocristaux d'un acier inoxydable austénitique en vue d'une comparaison avec le comportement de l'aluminium.

Tous les essais de compression plane sont réalisés avec le dispositif décrit au paragraphe II.1.2. Nous rappelons que les orientations sont précisées par la notation (h k l) [u v w] où h, k, l sont les indices de Miller du plan de compression de normale X_3 et u, v, w ceux de la direction d'allongement X_2. L'étude expérimentale porte sur quatre aspects :

- *Relations contrainte-déformation plastique*
- *Mesures précises des déformations*
- *Plans de glissement*
- *Rotations cristallines.*

Tableau II : Indices ∿ exacts des orientations de haute symétrie (110) [u v w] et (001) [u v w].

Indices ∿ exacts *	Orientations approximatives
(70 68 $\bar{05}$) [$\bar{05}$ $\bar{02}$ $\bar{99}$]	(1 1 0) [0 0 $\bar{1}$]
(66 71 $\bar{02}$) [$\bar{42}$ 37 $\bar{80}$]	(1 1 0) [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$]
(70 72 09) [$\bar{55}$ 61 $\bar{59}$]	(1 1 0) [$\bar{1}$ 1 $\bar{1}$]
(74 67 $\bar{02}$) [$\bar{67}$ 74 $\bar{09}$]	(1 1 0) [$\bar{8}$ 8 $\bar{1}$]
(72 69 02) [$\bar{21}$ 22 02]	(1 1 0) [$\bar{11}$ 11 $\bar{1}$]
(05 01 99) [01 99 $\bar{01}$]	(0 0 1) [0 1 0]
($\bar{05}$ 08 87) [$\bar{08}$ 71 $\bar{07}$]	(0 0 1) [$\bar{1}$ 10 $\bar{1}$]
(0 0 1) [26 97 0]	(0 0 1) [1 4 0]
($\bar{10}$ $\bar{07}$ 100) [35 93 10]	(0 0 1) [2 5 0]

(*) Les valeurs citées sont arrondies, de ce fait, les valeurs données de X_2 et X_3 ne correspondent pas à des axes rigoureusement orthogonaux.

III.1 - COMPRESSION PLANE PARTIELLEMENT IMPOSEE.

III.1.1 - CHOIX DES ORIENTATIONS.

Parmi toutes les orientations possibles, nous avons choisi d'une part, des orientations de haute symétrie de type (110) [u v w] ou (001) [u v w], et d'autre part cinq orientations de faible symétrie. La compression plane de monocristaux suivant les plans {110} et {001} présente un intérêt particulier :

- *En effet, pour le plan de compression {110}, qui fait partie des composantes importantes des textures de laminage des métaux C.F.C. les énergies de déformation plastique δT varient suivant la direction d'allongement d'une valeur élevée, $2\sqrt{6}\tau_c\delta\varepsilon$, à une valeur faible, $\sqrt{6}\tau_c\delta\varepsilon$.*

- *De plus, le plan de compression {001} fait souvent partie des composantes de textures de tôle après recristallisation.*

Nous présenterons, de façon détaillée, les résultats théoriques et expérimentaux pour chacune des orientations testées, suivi d'un résumé de l'ensemble des résultats.

III.1.2 - ORIENTATIONS DE HAUTE SYMETRIE.

Pour les essais expérimentaux sur les orientations dites de haute symétrie, les orientations testées sont, en général, légèrement différentes (de 1 à 3 degrés) de l'orientation exacte voulue, ce qui provient de la méthode de découpage notamment. Pour la plupart des cas, cet écart n'est d'aucune influence sur les résultats expérimentaux et théoriques. Les indices exacts des orientations testées figurent dans le *tableau II*.

III.1.2.1 - ORIENTATIONS (110) [u v w].

Les énergies de compression plane et les systèmes de glissement à l'état critique de monocristaux (110) [u v w] sont présentés sur la *figure 32*

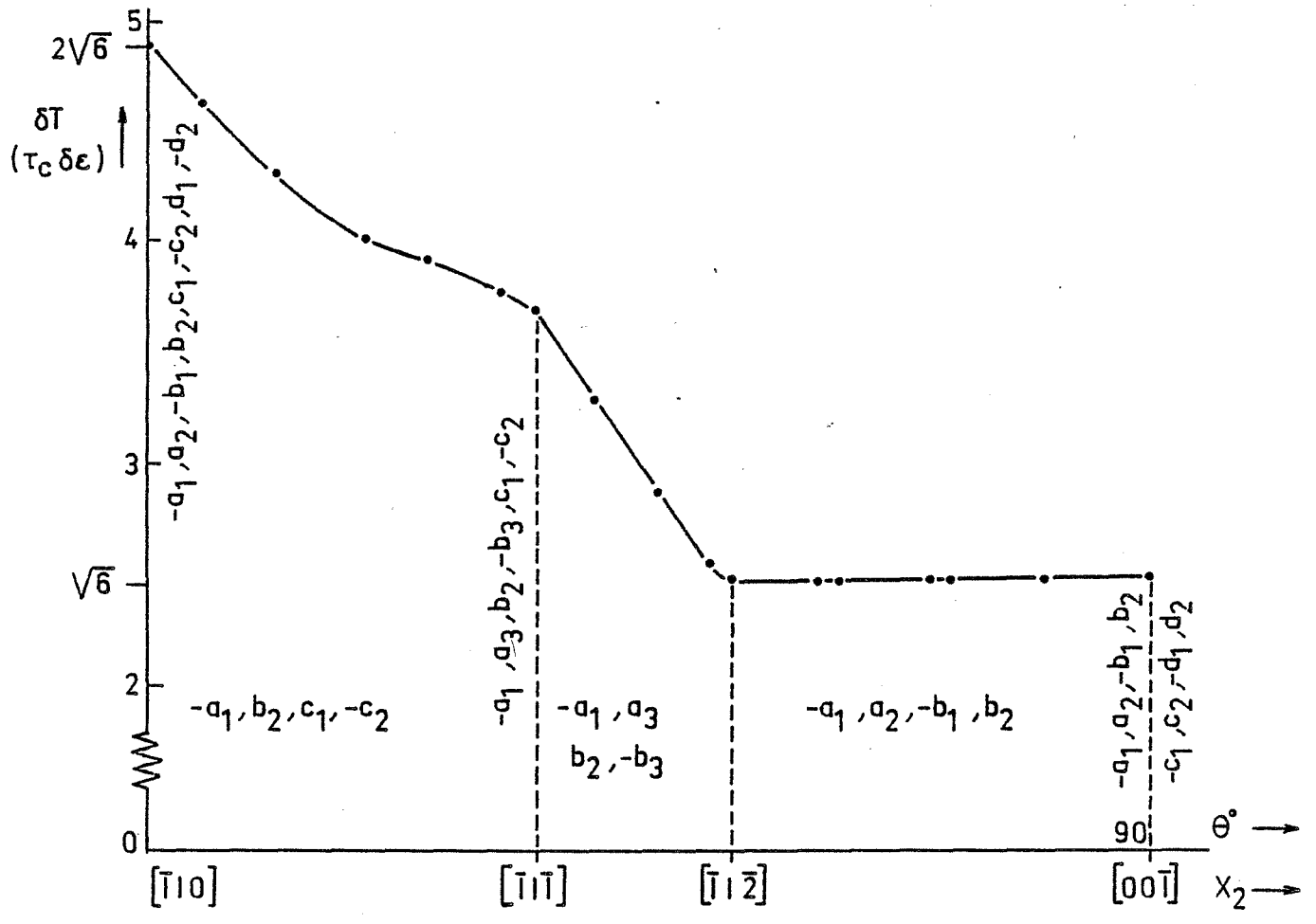


FIGURE 32 - Energie de déformation plastique T = f(orientation [u v w]), et systèmes de glissement à l'état critique pour la compression plane de cristaux (110) [u v w]

pour différents axes d'allongement X_2. On note que, à l'exception des orientations(110) [$\bar{1}$ 1 0], (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{1}$], (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$] et (110) [0 0 $\bar{1}$], quatre systèmes sont susceptibles de glisser ; l'indétermination est en général d'ordre 1. D'après la *figure 32*, nous avons trois cas à distinguer :

X_2 entre [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$] et [0 0 $\bar{1}$]

X_2 entre [$\bar{1}$ 1 $\bar{1}$] et [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$]

X_2 entre [$\bar{1}$ 1 0] et [$\bar{1}$ 1 $\bar{1}$]

1er cas : X_2 entre [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$] et [0 0 $\bar{1}$]

Pour ces orientations on constate que l'énergie de déformation plastique ($\delta T = \sqrt{6}\ \tau_c\ \delta\varepsilon$) est constante, avec 4 systèmes de glissement possibles (indétermination d'ordre 1). *La figure 33* montre un exemple de polyèdre critique des contraintes pour l'orientation (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{4}$]. Le calcul de dT en fonction de l'amplitude de glissement du système $-a_1$ (notée $\delta\gamma_1$) pour cette orientation donne une fonction convexe *(figure 34)* dont le minimum à dT = 0 se trouve à l'intérieur du domaine de variation de $\delta\gamma_1$. Les quatres systèmes ($-a_1$; a_2 ; $-b_1$; b_2) devraient tous glisser (avec des amplitudes différentes) mais la rotation qui en résulte est nulle. En fait toute combinaison de glissements qui donne une rotation aboutit à une augmentation de l'énergie. D'après le même raisonnement énergétique, les rotations théoriques pour les autres orientations dans ce plateau sont probablement nulles. Ainsi les orientations de ce plateau sont stables.

Le cisaillement théorique e^*_{12} dépend de l'axe d'allongement X_2, il décroit progressivement de 0,35 $\bar{\varepsilon}$ pour l'orientation (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$] à 0,18 $\bar{\varepsilon}$ pour (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{4}$] et zéro pour (110) [0 0 $\bar{1}$]. Le cisaillement théorique e^*_{23} est nul pour toutes les orientations de ce plateau. Nous avons testé une orientation proche de (110) [0 0 $\bar{1}$] et avons trouvé que l'orientation est effectivement stable avec $e^*_{12} \simeq e^*_{23} \simeq 0$.

Le cas de l'orientation (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$] est très particulier. Le polyèdre critique est présenté sur *la figure 35*. La contrainte qui rend maximal l'énergie est $\sigma^*_{33} = -\sqrt{6}\ \tau_c$, mais la contrainte σ^*_{11} a une valeur indéterminée entre 0 et $-3/2\ \sqrt{6}\ \tau_c$. Si $\sigma^*_{11} = 0$, quatre systèmes : $-a_1$, a_2, $-b_1$ et b_2 sont

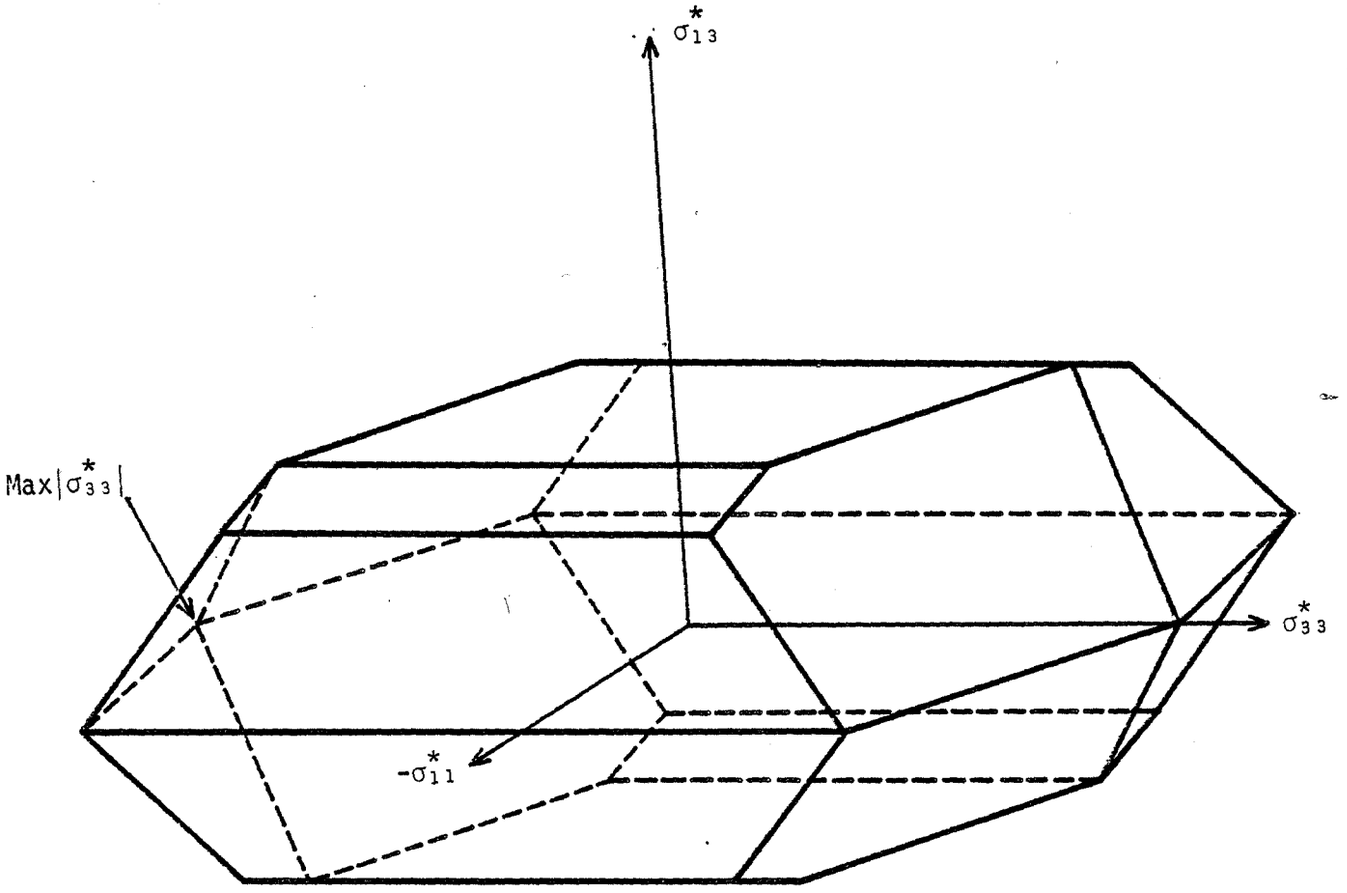


FIGURE 33 - Polyèdre critique de l'orientation initiale ≃ (110) [$\bar{1}1\bar{4}$]

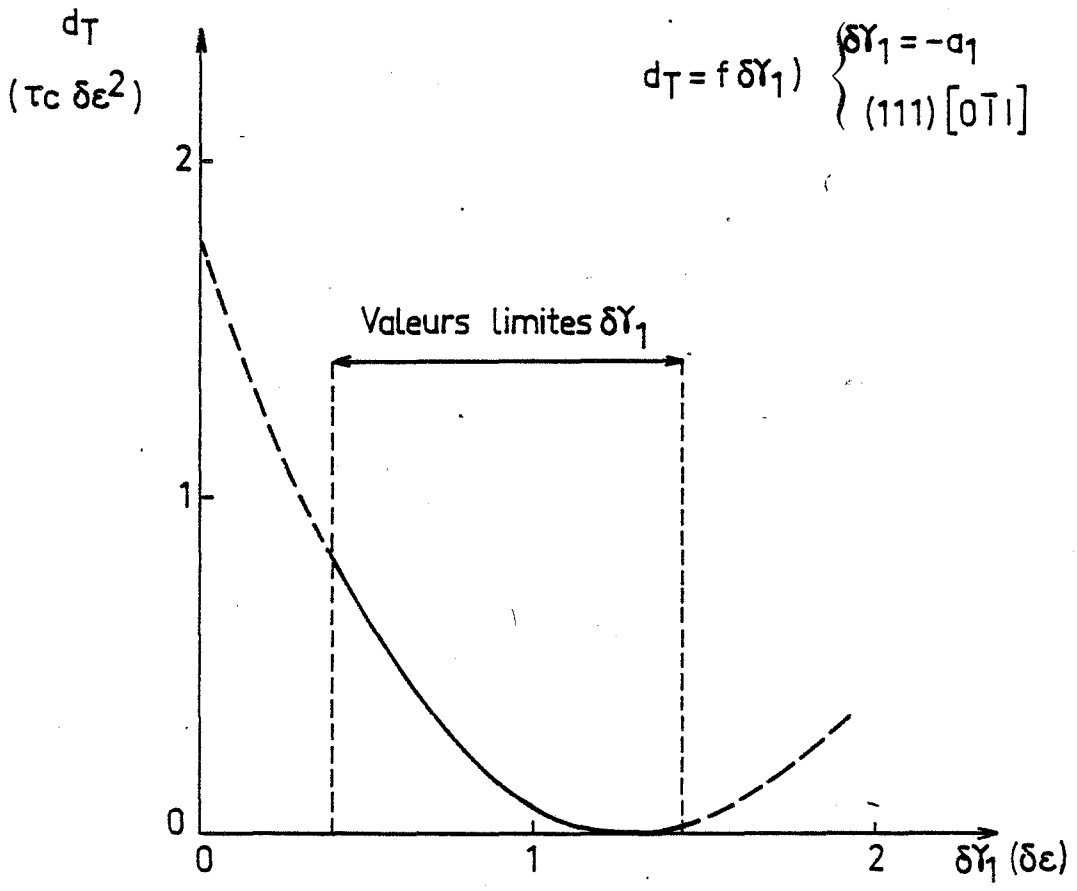


FIGURE 34 - Courbes $dT = f(\delta\gamma_1)$ pour l'orientation initiale ≃ (110) $[\bar{1}1\bar{4}]$

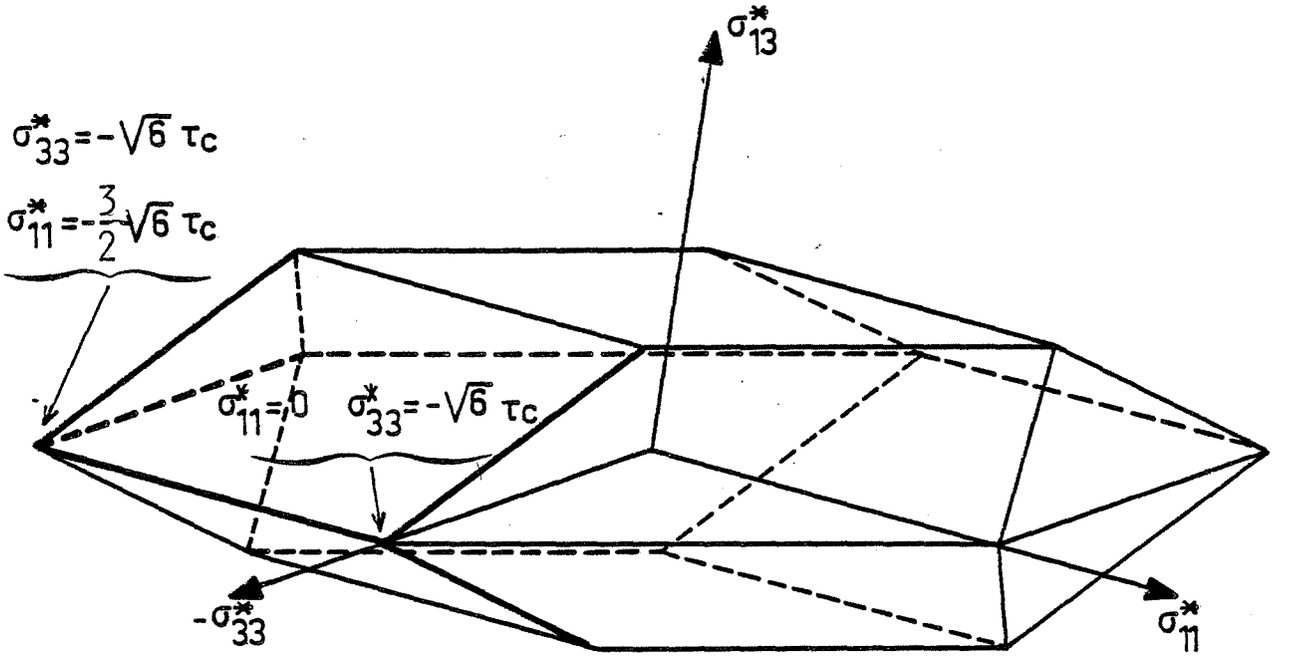


FIGURE 35 - Polyèdre critique de l'orientation initiale ≃ (110) [$\bar{1}1\bar{2}$]

possibles. Si $\sigma^*_{11} = -3/2\ \sqrt{6}\ \tau_c$ six systèmes sont possibles : $-a_1$, a_3, b_2, $-b_3$, $-d_1$ et d_2. Entre ces deux sommets du polyèdre, d'énergie identique, seuls les systèmes en commun-a_1 et b_2 sont à l'état critique. CHANDRA [47] considère que $|\sigma^*_{11}|$ doit être inférieure à $|\sigma^*_{33}|$. Or si $\sigma^*_{11} = 0$ l'opération des systèmes a_2 et $-b_1$ conduit à une déformation $\delta\bar{e}_{11}$ et par conséquent à une contrainte de réaction $\sigma^*_{11} < 0$, a_2 et $-b_1$ ne seront plus alors à l'état critique et ne glisseront plus. Il semble ainsi que seuls les systèmes $-a_1$ et b_2 puissent avoir une amplitude de glissement importante. Le glissement sur ces deux systèmes conduit à une rotation nulle et un cisaillement $e^*_{12} \simeq 0{,}35\ \bar{\varepsilon}$.

Ce raisonnement "cinétique" mène à la même solution que celle obtenue en minimisant dT pour les six systèmes possibles du sommet dont $\sigma^*_{11} = -\ 3/2\ \sqrt{6}\ \tau_c$. En effet, dT est minimum (= 0) pour la même solution $\delta\gamma\ (-a_1) = \delta\gamma(b_2) = \frac{\sqrt{6}}{2}\ \delta\varepsilon$, toutes les autres amplitudes $\delta\gamma^l$ étant nulles.

Cette orientation a été testée en compression plane par de nombreux auteurs [16, 17, 47, 48] ainsi que par nous mêmes. Tous trouvent un cisaillement $e^*_{12} \simeq 0{,}35\ \bar{\varepsilon}$ *(Fig. 20, Chapitre II)* et un cisaillement $e^*_{23} = 0$ avec une rotation nulle, en accord avec ces théories. Les plans de glissement observés sont effectivement a et b.

2ème cas : X_2 entre $[\bar{1}\ 1\ \bar{1}]$ et $[\bar{1}\ 1\ \bar{2}]$

Quatre systèmes ($-a_1$, a_3, b_2 et $-b_3$) sont à l'état critique, sauf pour l'orientation (110) $[\bar{1}\ 1\ \bar{1}]$ où deux autres systèmes c_1 et $-c_2$ sont également possibles *(Fig. 32)*. Considérons en détails le cas de l'orientation (110) $[\bar{1}\ 1\ \bar{1}]$ dont le polyèdre critique est présenté à la *Figure 36*. L'état de contrainte est : $\sigma^*_{33} = \sigma^*_{11} = -3/2\ \sqrt{6}\ \tau_c$. L'indétermination étant d'ordre 3, il est possible de calculer les r_i et dT en fonction de 3 des 6 $\delta\gamma^l$ disons $\delta\gamma_1\ (-c_2)$, $\delta\gamma_4\ (c_1)$ et $\delta\gamma_6\ (b_2)$.

On trouve

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{6}\ (\delta\gamma_2 - \delta\gamma_4 + 2\delta\gamma_6 + \sqrt{6}\ \delta\varepsilon) \\ r_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\ (2\delta\gamma_2 - 2\delta\gamma_4 - 2\delta\gamma_6 - \sqrt{6}\ \delta\varepsilon) \\ r_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ (\delta\gamma_2 + \delta\gamma_4) \end{cases}$$

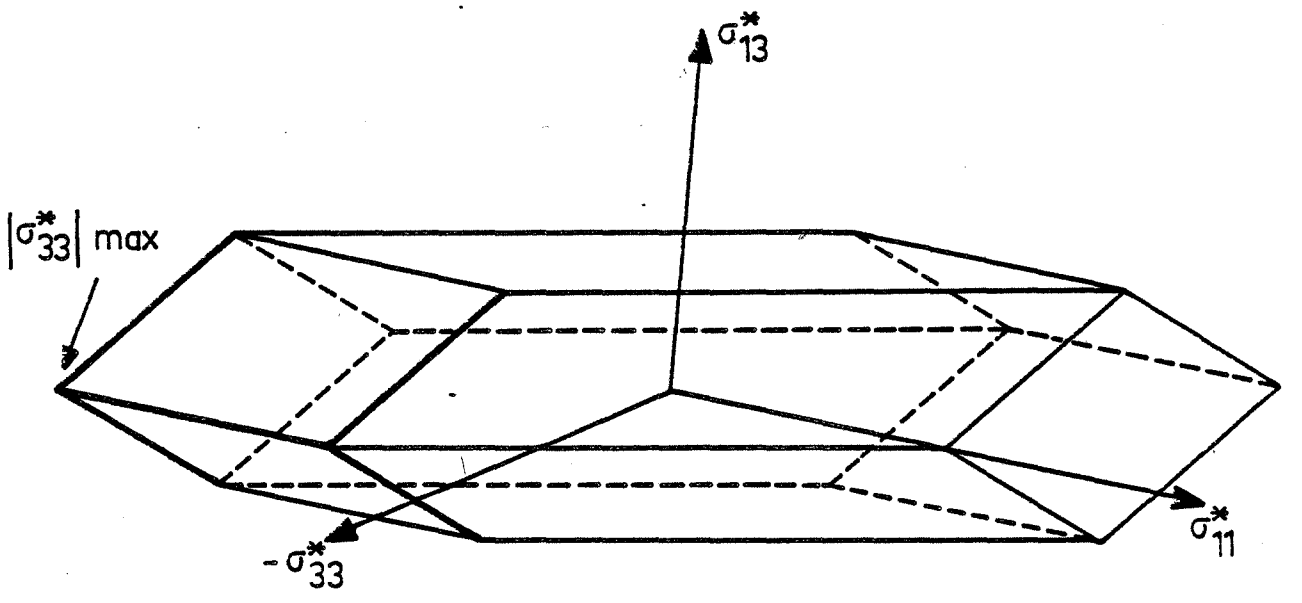


FIGURE 36 - Polyèdre critique de l'orientation initiale ≃ (110) [$\bar{1}1\bar{1}$]

et

$$dT = \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c\,(\delta\gamma_2^2 + \delta\gamma_4^2 + \delta\gamma_6^2 + \delta\gamma_2\delta\gamma_4 + \delta\gamma_2\delta\gamma_6 - \delta\gamma_4\delta\gamma_6 + \sqrt{6}\delta\gamma_2\delta\varepsilon + \sqrt{6}\delta\gamma_6\delta\varepsilon + \frac{3}{2}\delta\varepsilon^2)$$

La minimisation numérique de dT sur ordinateur donne $dT \simeq 0{,}55\,\tau_c\delta\varepsilon^2$ avec 5 systèmes actifs ($\delta\gamma\,(-b_3) = 0$) et une légère rotation, dont la composante importante est r_3, telle que l'axe X_2 tend vers $[\bar{1}\ 1\ \bar{2}]$. Or dès que X_2 quitte $[\bar{1}\ 1\ \bar{1}]$, les systèmes $(c_1\ ;\ -c_2)$ ne sont plus à l'état critique. En effet ils sont sollicités à des contraintes légèrement inférieures à τ_c ($\sim 0{,}98\ \tau_c$ pour $\bar{\varepsilon} = 0{,}1$) et ne devraient plus glisser. De ce fait, la composante de la rotation $r_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,(\delta\gamma(c_1) + \delta\gamma(-c_2))$ devrait s'annuler. Si par contre, on accepte la possibilité d'un glissement sur les systèmes c_1 et $-c_2$ pour des cissions réduites légèrement inférieures à τ_c ($\geq 0{,}9\ \tau_c$ par exemple) une rotation de l'axe X_2 vers $[\bar{1}\ 1\ \bar{2}]$ de quelques degrés devient possible. Or les orientations expérimentales après déformation vont bien dans ce sens *(Fig. 37)*, c'est-à-dire une rotation autour de X_3 qui tend à ramener X_2 vers $[\bar{1}\ 1\ \bar{2}]$. Il semble donc, dans ce cas, qu'il y a bien glissement sur les systèmes c_1 et $-c_2$, même lorsque leur cissions réduites théoriques τ^k sont telles que $0{,}9\ \tau_c^l \leq \tau^k \leq \tau_c^l$. Nous avons rencontré des cas similaires, c'est-à-dire plusieurs systèmes très proches de l'état critique, pour d'autres orientations cristallines en déformation partiellement imposée. Compte tenu du fait que l'état de contraintes réel, le long d'un échantillon, n'est probablement pas rigoureusement identique à celui calculé (à cause des contraintes internes, hétérogénéités de déformation , frottements, et éventuellement un écrouissage anisotrope ...), il nous semble plus réaliste d'admettre la possibilité de glissement sur ces systèmes "quasi-critiques". Ceci est possible si le critère de sélection des systèmes susceptibles de glisser devient :

$$\tau^k \geq \alpha\tau_c^l \quad \text{avec} \quad \alpha = 0{,}9 \text{ ou } 0{,}95$$

Cette méthode de sélection des systèmes critiques augmente le nombre de systèmes possibles, donc augmente l'indétermination des $\delta\gamma^l$, mais la minimisation ultérieure de dT nous donne des valeurs numériques exactes pour les amplitudes $\delta\gamma^l$, les déformations e^*_{ij} non imposées et les rotations r_i.

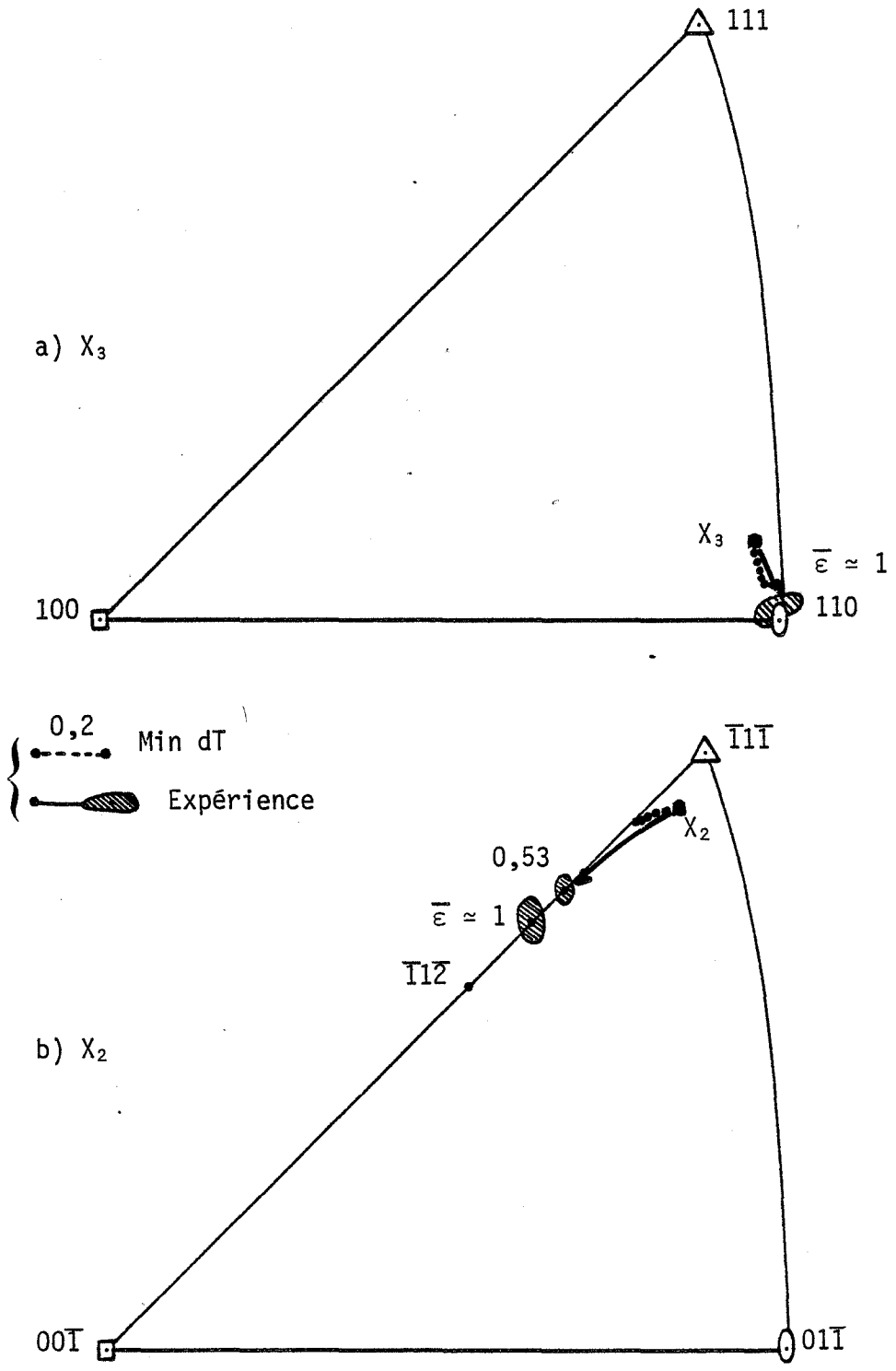


Figure 37 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_2 et X_3 de l'orientation initiale ≃ (110) [$\bar{1}1\bar{1}$]. Les positions initiales sont indiquées par ● , et les chiffres iniquent les valeurs de déformation rationnelle $\bar{\varepsilon}$.

Avec le critère de sélection des $\delta\gamma^l$ possibles $\tau^k \geq 0{,}9\ \tau_c^l$, les calculs successifs de minimisation de dT, pour l'orientation (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{1}$], prévoit une légère rotation vers (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$], des cisaillements e^*_{23} très faibles et e^*_{12} initialement de 0,3 $\bar{\varepsilon}$, avec glissement essentiellement sur les plans a et b à $\bar{\varepsilon} = 1$.

Plusieurs éprouvettes de cette orientation ont été testées. L'expérience nous donne :

- *glissement sur les plans a et b (Figure 38)*
- *cisaillements* $e^*_{23} \simeq 0$ *et* $e^*_{12} \simeq 0{,}35\ \bar{\varepsilon}$ *(Figure 39)*
- *rotation de quelques degrés autour de* X_3 *dans le sens qui amène* X_2 *vers* [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$] *(Figure 37).*

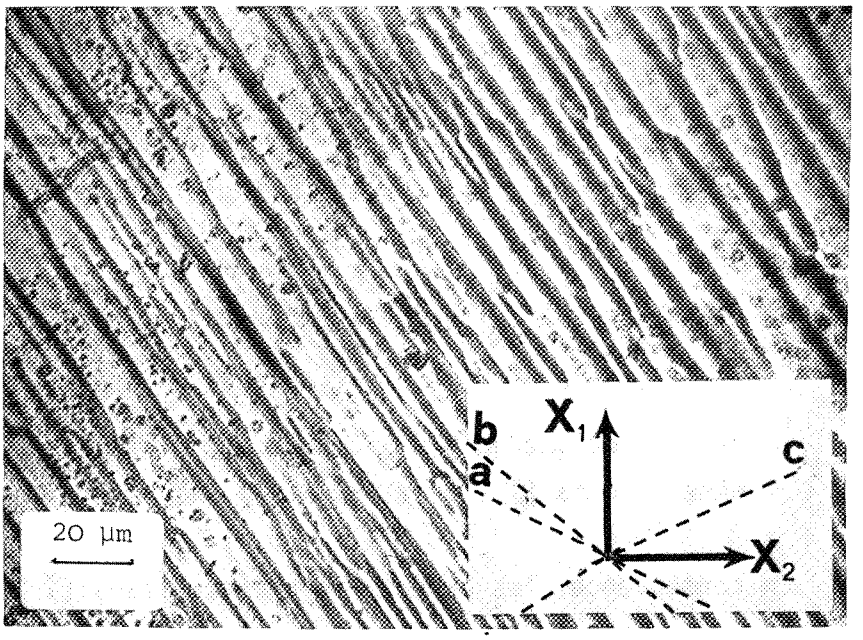
En conséquence, les orientations entre (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{1}$] et (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$] devraient être relativement stables avec une légère rotation de l'axe d'allongement vers [$\bar{1}$ 1 $\bar{2}$] surtout pour les orientations proches de (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{1}$].

3ème cas : X_2 entre [$\bar{1}$ 1 0] et [$\bar{1}$ 1 $\bar{1}$]

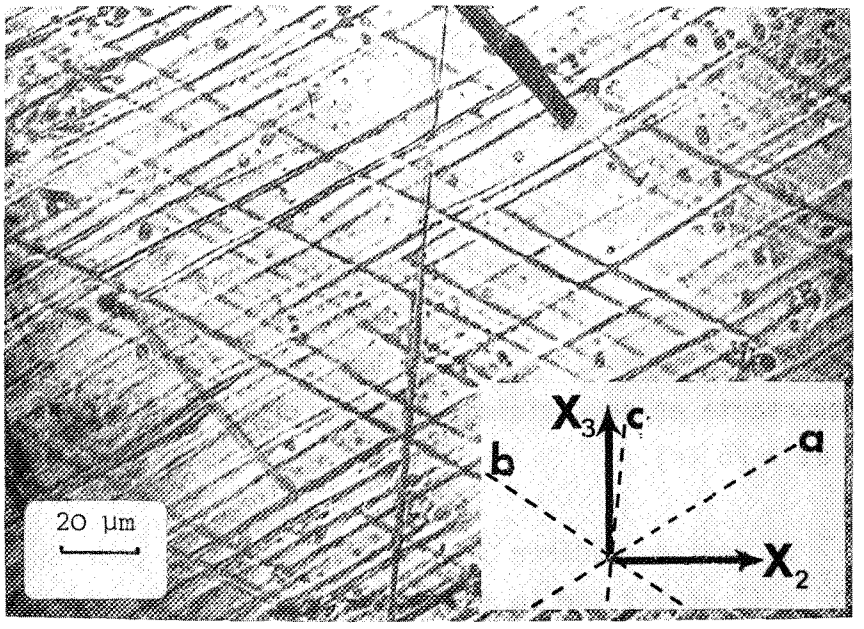
Les énergies de déformation plastique pour les orientations entre (110) [$\bar{1}$ 1 0] et (110) [$\bar{1}$ 1 $\bar{1}$] sont relativement importantes. On doit s'attendre à des duretés élevées et une instabilité éventuelle de l'orientation. Pour une orientation intermédiaire, par exemple (110) [$\bar{8}$ 8 $\bar{1}$], 4 systèmes ($\delta\gamma_1$ ($-a_1$) ; $\delta\gamma_2$ (b_2) ; $\delta\gamma_3$ (c_1) ; $\delta\gamma_4$ ($-c_2$)) sont à l'état critique et la courbe $dT = f(\delta\gamma_1)$ à une forme concave *(Figure 40)*. Toute valeur de $\delta\gamma_1$ fait décroitre l'énergie d'une façon importante et deux minima, de même valeur, existent aux valeurs limites de $\delta\gamma_1$ (0 et + $\sqrt{6}\ \delta\varepsilon$).

On peut considérer 3 solutions possibles pour $\delta\gamma_1$, indiquées respectivement I, II et III sur la *figure 40*. Ces solutions conduisent à des rotations et des cisaillements très différents *(Tableau III)*.

Dans ce cas le programme de minimisation de dT sur ordinateur ne fournit que la solution I, $\delta\gamma_1 = 0$. Si l'on considère les systèmes de glissement qui interviennent avec ces différentes solutions *(c.f. Tableau III)* on constate



Face - X_3



Face X_1

FIGURE 38 - Traces des plans de glissement observées à $\bar{\varepsilon} \simeq 0,5$, orientation initiale ≃ (110) [$\bar{1}$1$\bar{1}$]

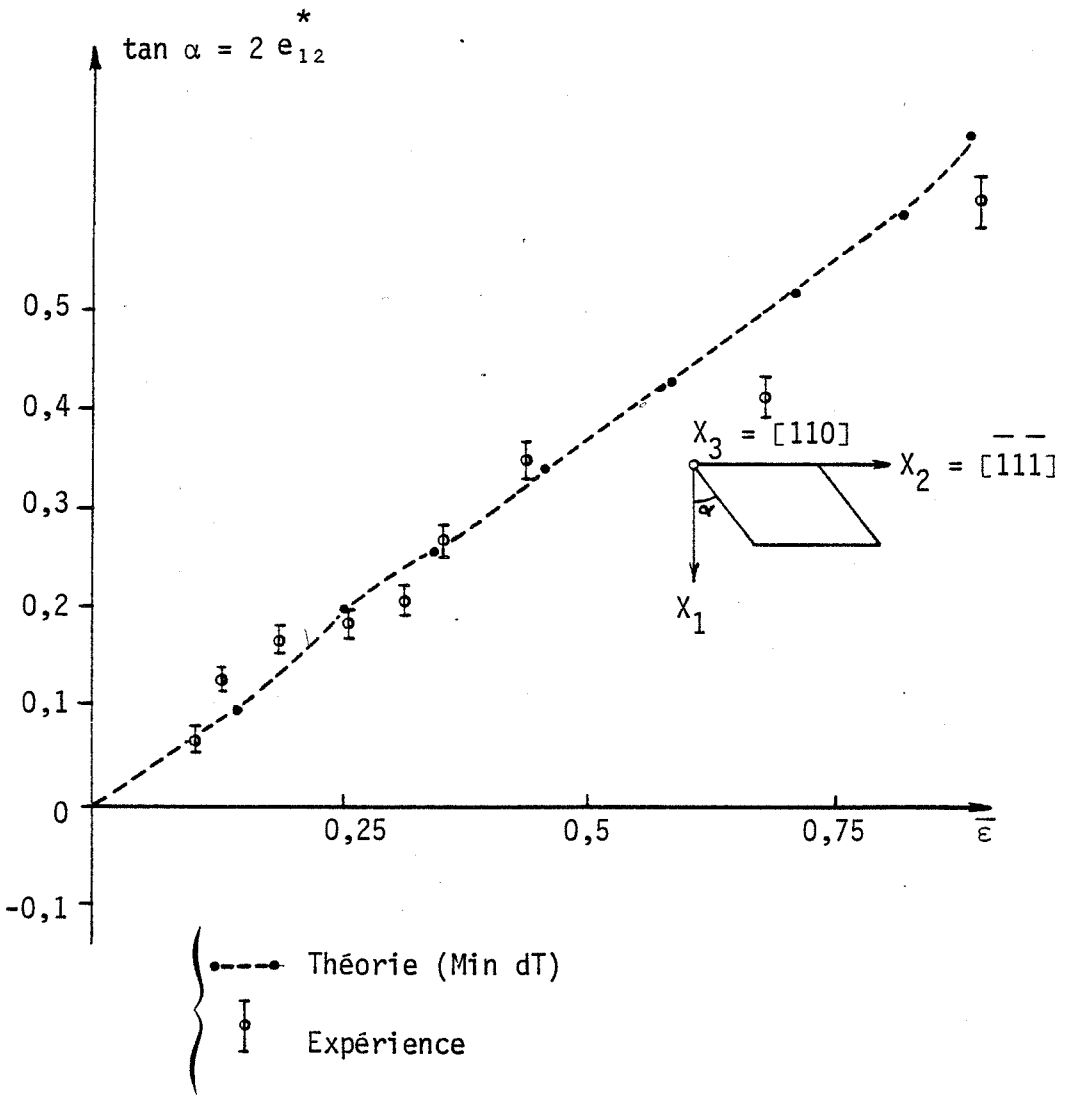


FIGURE 39 - Cisaillement e_{12}^{*} théorique et expérimental du monocristal d'orientation initiale ≃ (110) [$\bar{1}1\bar{1}$]

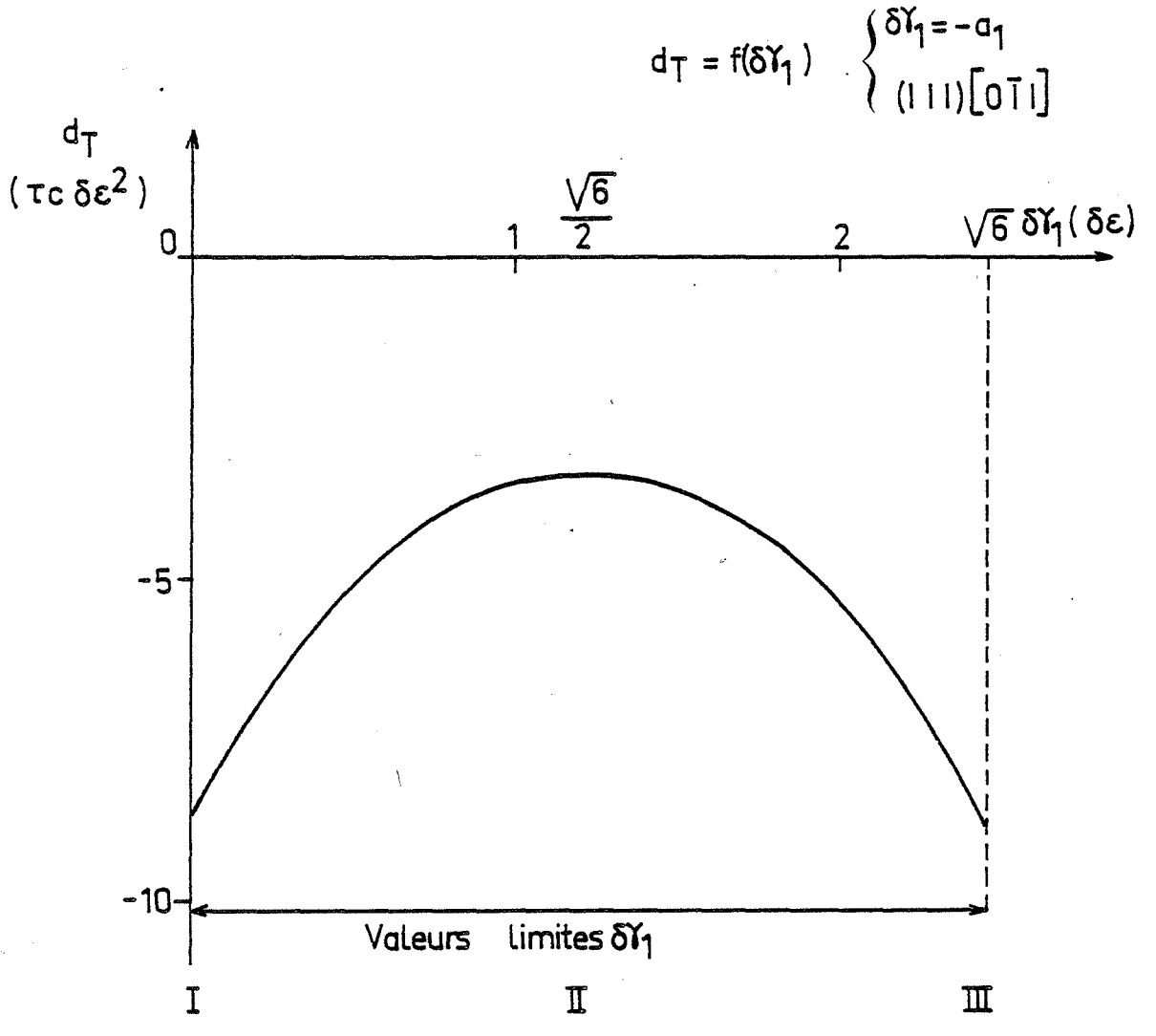


FIGURE 40 - Fonction $dT = f(\delta\gamma_1)$ pour l'orientation initiale ≃ (110) $[\bar{8}8\bar{1}]$

Tableau III : Orientation (110) $[\bar{8}\ 8\ \bar{1}]$, solutions possibles.

SOLUTIONS	$\delta\gamma_1$ $(-a_1)$	$\delta\gamma_2$ (b_2)	$\delta\gamma_3$ (c_1)	$\delta\gamma_4$ $(-c_2)$	dT ($\tau_c\ \delta\varepsilon^2$)	ROTATION ($\delta\varepsilon$) r_1	r_2	r_3	CISAILLEMENTS ($\delta\varepsilon$) e^*_{12}	e^*_{23}	NOUVELLE ORIENTATION ($\bar{\varepsilon} = 0,1$)	NOUVEAUX SYSTEMES DE GLISSEMENT
I	0	2,45	2,04	0,14	- 8,7	-0,7	-1,3	1,2	0,6	0,9	$(11\ 9\ \bar{2})$ $[\bar{7}\ 8\ \bar{2}]$	a_2 ; b_2 ; c_1
II	1,22	1,22	1,09	1,09	- 3,4	0	0	1,2	0,6	0	$(1\ 1\ 0)$ $[\bar{7}\ 7\ \bar{2}]$	$-a_1$; b_2 c_1 ; $-c_2$
III	2,45	0	0,14	2,04	- 8,7	0,7	1,3	1,2	0,6	-0,9	$(9\ 11\ 2)$ $[\bar{8}\ 7\ \bar{2}]$	$-a_1$; $-b_1$; $-c_2$

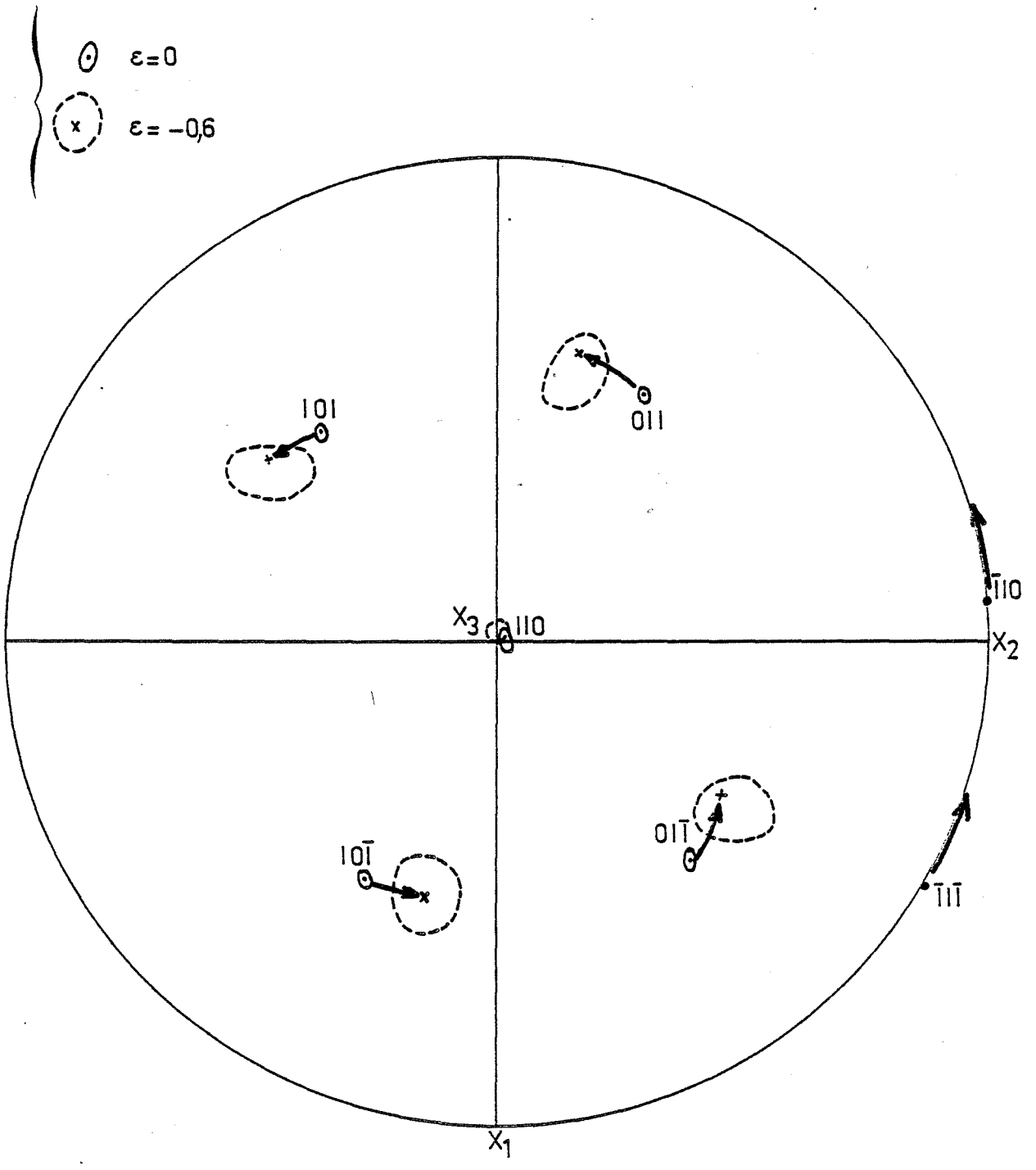


FIGURE 41 - Rotation expérimentale du monocristal d'orientation initiale ≃ (110) [$\bar{8}8\bar{1}$] vers ≃ (110) [$\bar{1}1\bar{1}$] (figure de pôles {220})

que les solutions I et III conduisent à des combinaisons de 3 systèmes (dont un n'était pas parmi les 4 d'origine) et que l'opération de ces 3 systèmes continue d'éloigner le plan de compression de (110). Par exemple, la solution I aboutit à $\bar{\varepsilon} = 1$ à une orientation proche de $(21\bar{1})$ $[\bar{1}\ 1\ \bar{1}]$. Par contre selon la solution II, qui garde les mêmes systèmes de glissement, l'orientation tourne autour de X_3 vers (110) $[\bar{1}\ 1\ \bar{1}]$.

Deux orientations de ce type ont été testées : la première proche de (110) $[\bar{8}\ 8\ \bar{1}]$ et la deuxième proche de (110) $[\bar{1}\ 1\ 0]$. Dans les deux cas, les cristaux se comportent expérimentalement suivant la solution II, c'est-à-dire une rotation autour de X_3 qui amène l'orientation vers (110) $[\bar{1}\ 1\ \bar{1}]$ *(Figure 41 et 42)* un cisaillement e^*_{23} faible et un cisaillement $e^*_{12} \simeq 0{,}3\ \bar{\varepsilon}$ *(Figure 43)*. En fait le cristal proche de (110) $[\bar{1}\ 1\ 0]$ était légèrement désorienté vers (110) $[\bar{1}0\ 10\ 1]$ et par conséquent a tourné autour du même axe dans l'autre sens vers (110) $[\bar{1}\ 1\ 1]$ *(Figure 42)* avec un cisaillement $e^*_{12} \simeq - 0{,}3\ \bar{\varepsilon}$. Les traces des plans observés sont essentiellement a et b avec quelques traces du plan c *(Figure 44)*.

On constate donc que, dans ce cas, la minimisation de dT sans tenir compte de la continuité des glissements (solutions I et III), conduit à un résultat faux. Ces résultats soulignent l'importance du critère de continuité des glissements, surtout pour les orientations de haute symétrie. En fait pour une symétrie d'ordre 2 (cas du plan (110)), on doit s'attendre à des valeurs de $\delta\gamma^l$ qui respectent cette symétrie comme le fait la solution II.

Remarques :

Il ressort de l'étude des orientations (110) [u v w] que le plan de compression {110} est stable en compression plane partiellement imposée, en accord avec les observations expérimentales des textures de laminage. Les seules rotations constatées, pour des orientations dont l'axe d'allongement X_2 se situent entre $[\bar{1}\ 1\ 0]$ et $[\bar{1}\ 1\ \bar{2}]$, sont autour de la normale au plan (110) telles que X_2 tend vers $[\bar{1}\ 1\ \bar{2}]$, qui est une orientation stable.

Ces résultats sont en bon accord avec les calculs théoriques de minimisation de dT en conditions mixtes, si l'on tient compte d'une part du critère de continuité des glissements, et d'autre part, de la possibilité de glissement sur des systèmes "quasi-critiques".

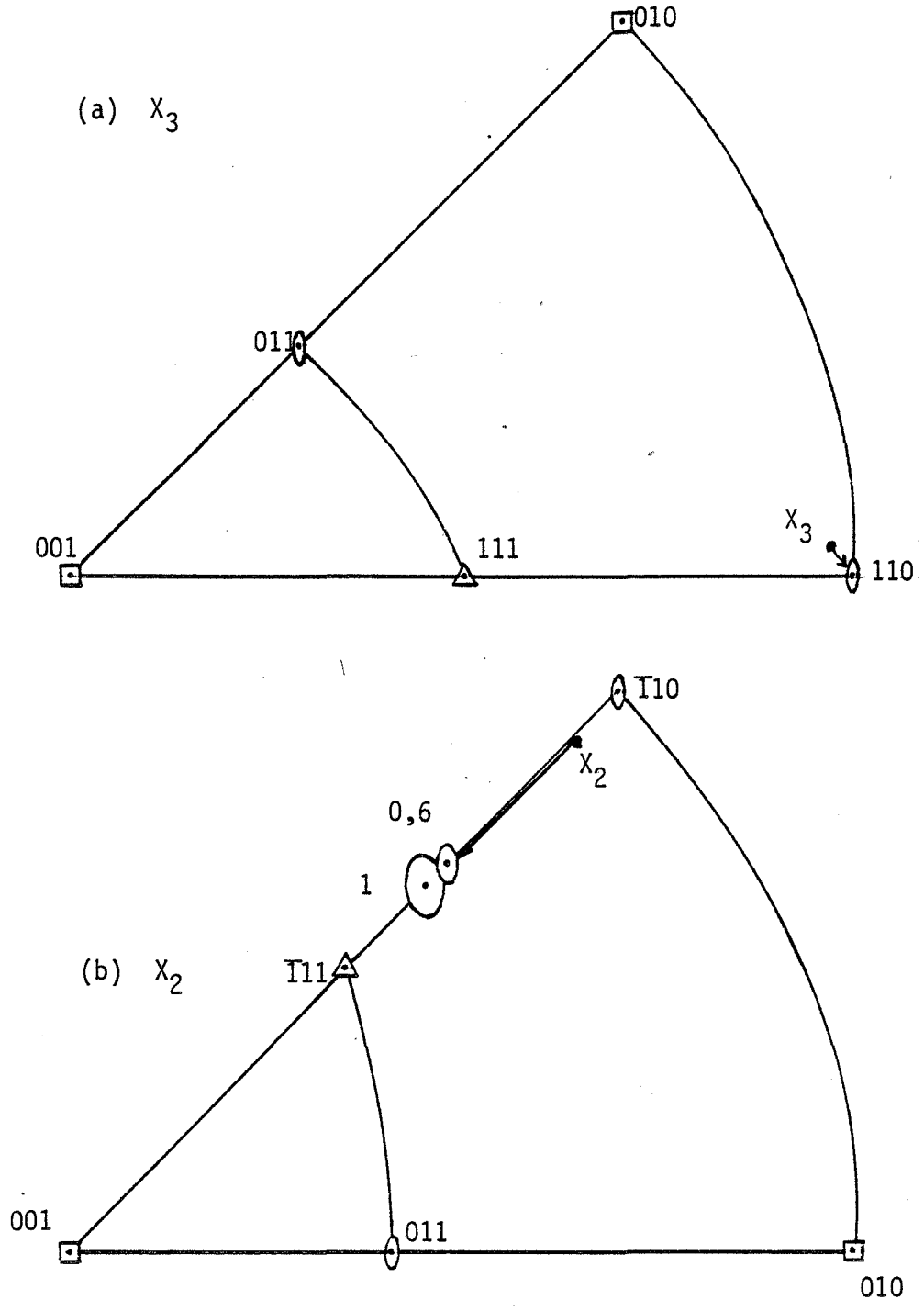


FIGURE 42 - Rotations expérimentales des axes X_2 et X_3 de l'orientation initiale ≃ (110) [$\bar{1}0$ 10 1]

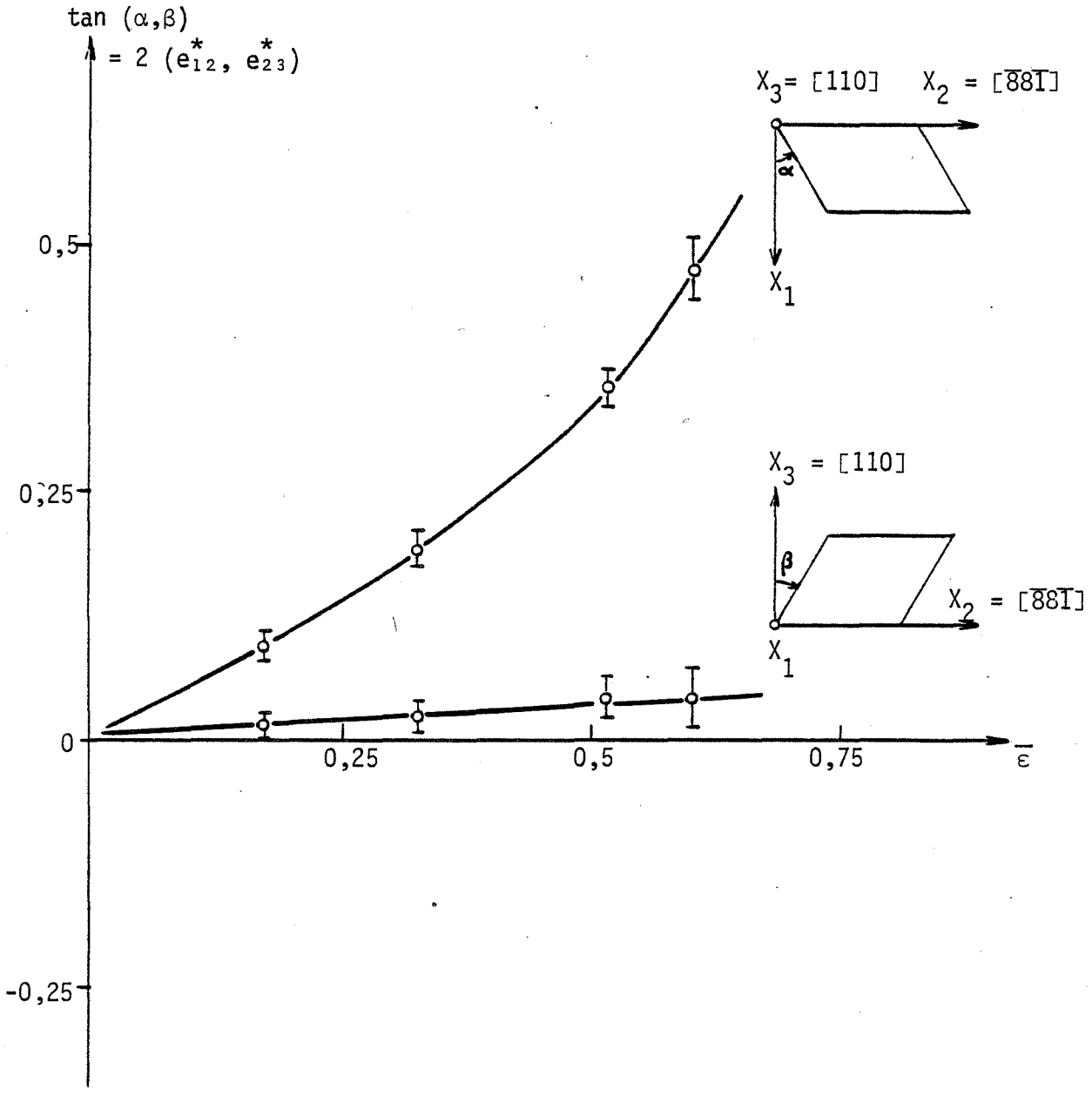
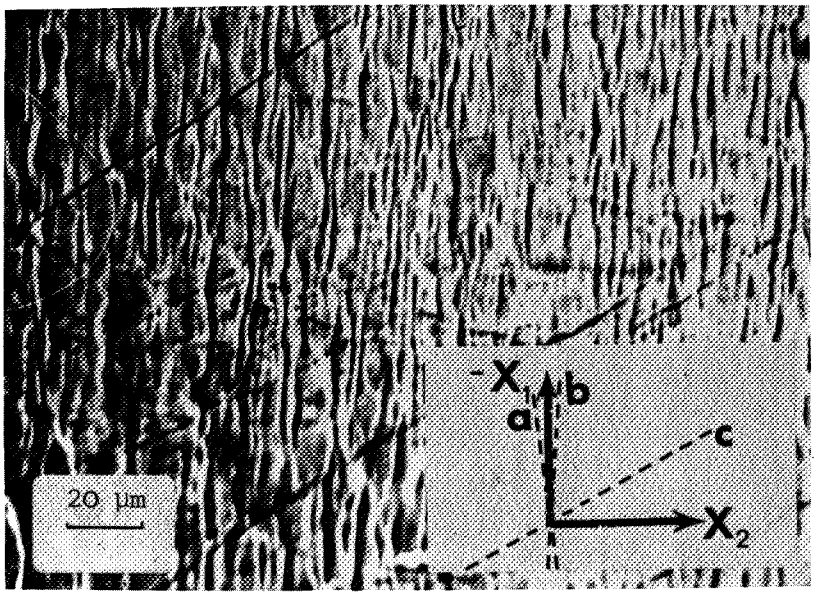
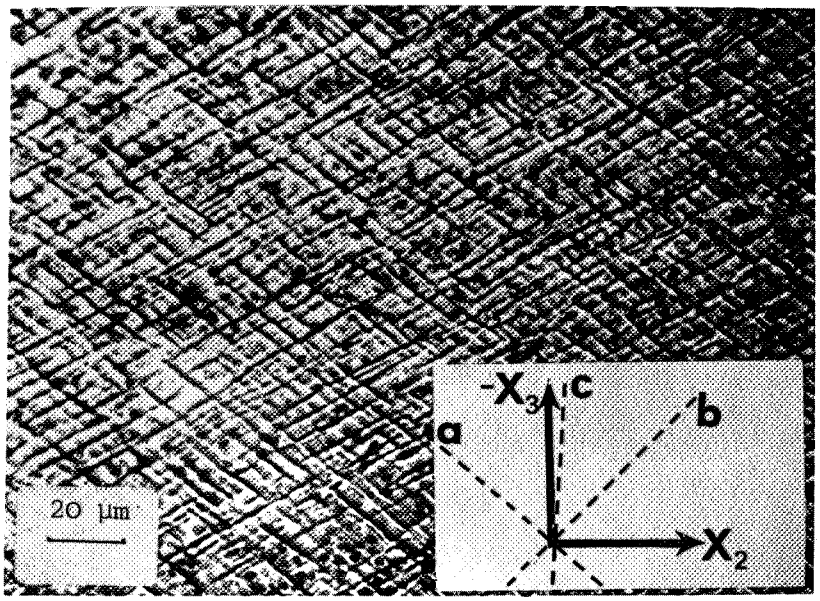


FIGURE 43 - Cisaillements e^*_{12} et e^*_{23} expérimentaux du monocristal d'orientation initiale ≃ (110) [$\bar{8}8\bar{1}$]



Face X_3



Face $-X_1$

FIGURE 44 - Traces des plans de glissement observées à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}5$, orientation initiale $\simeq (110)\ [\bar{1}10]$

Les courbes contrainte-déformation plastique de quatre orientations de haute symétrie du type (110) [u v w] sont présentées sur la *figure 45*. Les courbes $\sigma(\overline{\varepsilon})$ se classent dans l'ordre croissant des énergies théoriques de déformation pour la compression plane partiellement imposée. Notons toutefois que l'orientation (110) $[\overline{1}\ 1\ \overline{2}]$ est nettement moins dure que (110) $[0\ 0\ \overline{1}]$ qui possède la même énergie théorique = $\sqrt{6}\ \tau_c\ \delta\varepsilon$.

III.1.2.2 - ORIENTATIONS (001) [u v w].

A partir de l'orientation (001) [0 1 0], nous avons testé trois autres orientations de plan de compression (001) mais tournées de 8°, 14° et 22° autour de X_3. Pour toutes ces orientations, l'énergie de déformation plastique initiale est faible ($\sim \sqrt{6}\ \tau_c\ \delta\varepsilon$).

Orientation ∿ (001) [0 1 0].

Le polyèdre critique de cette orientation est présenté à la *figure 46*, deux sommets 1 et 5 possèdent la même contrainte σ^*_{33} maximale en valeur absolue : sommet 1 ($\sigma^*_{11} = 0$, $\sigma^*_{33} = -\sqrt{6}\ \tau_c$; 8 systèmes de glissement a_1 ; $-a_2$; b_1 ; $-b_2$; c_1 ; $-c_2$; d_1 ; $-d_2$), sommet 5 ($\sigma^*_{11} = \sigma^*_{33} = -\sqrt{6}\ \tau_c$; 8 systèmes a_1 ; $-a_3$; b_1 ; $-b_3$; c_1 ; $-c_3$; d_1 ; $-d_3$) avec quatre systèmes en commun (a_1 ; b_1 ; c_1 et d_1). Ce polyèdre critique est identique à celui publié par KOCKS et CHANDRA [40] mais ces derniers n'ont pris en compte que le sommet 1.

On peut démontrer facilement à partir des relations $\delta\varepsilon_{ij} = \sum_l M^l_{ij}\delta\gamma^l$ que, quelque soit la valeur de σ^*_{11}, seuls les systèmes en commun peuvent glisser. Or avec ces quatre systèmes, les équations $g_{ij} = \sum_l b^l_i\ n^l_j\ \delta\gamma^l$, montrent que les composantes de la rotation $r_2 = r_3 = 0$; seule une rotation r_1 autour de X_1 est possible. Elle dépend des amplitudes de glissement choisies. Le calcul des rotations extrêmes conduit à $-\delta\varepsilon \leq r_1 \leq \delta\varepsilon$ avec glissement seulement sur la paire (a_1, c_1) pour $r_1 = \delta\varepsilon$ et sur la paire (b_1, d_1) pour $r_1 = -\delta\varepsilon$.

Les calculs itératifs de minimisation de dT conduisent à des solutions qui oscillent entre plusieurs sommets avec successivement glissement sur (a_1 ; c_1) et sur (b_1 ; d_1) de sorte que globalement la rotation théorique est nulle ainsi que les cisaillements.

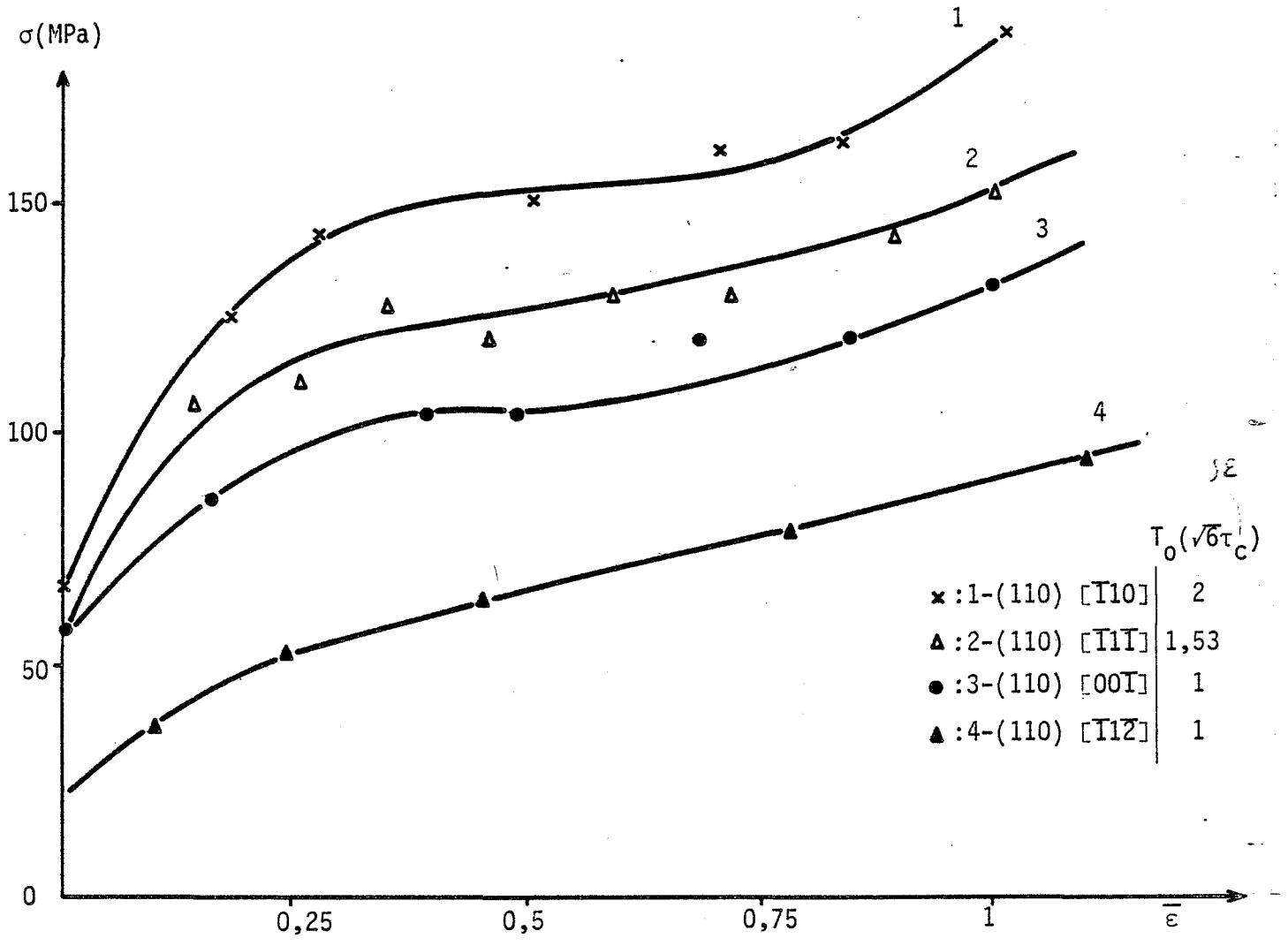


FIGURE 45 - Courbes contrainte-déformation plastique de quatre orientations de haute symétrie du type (110) [u v w]

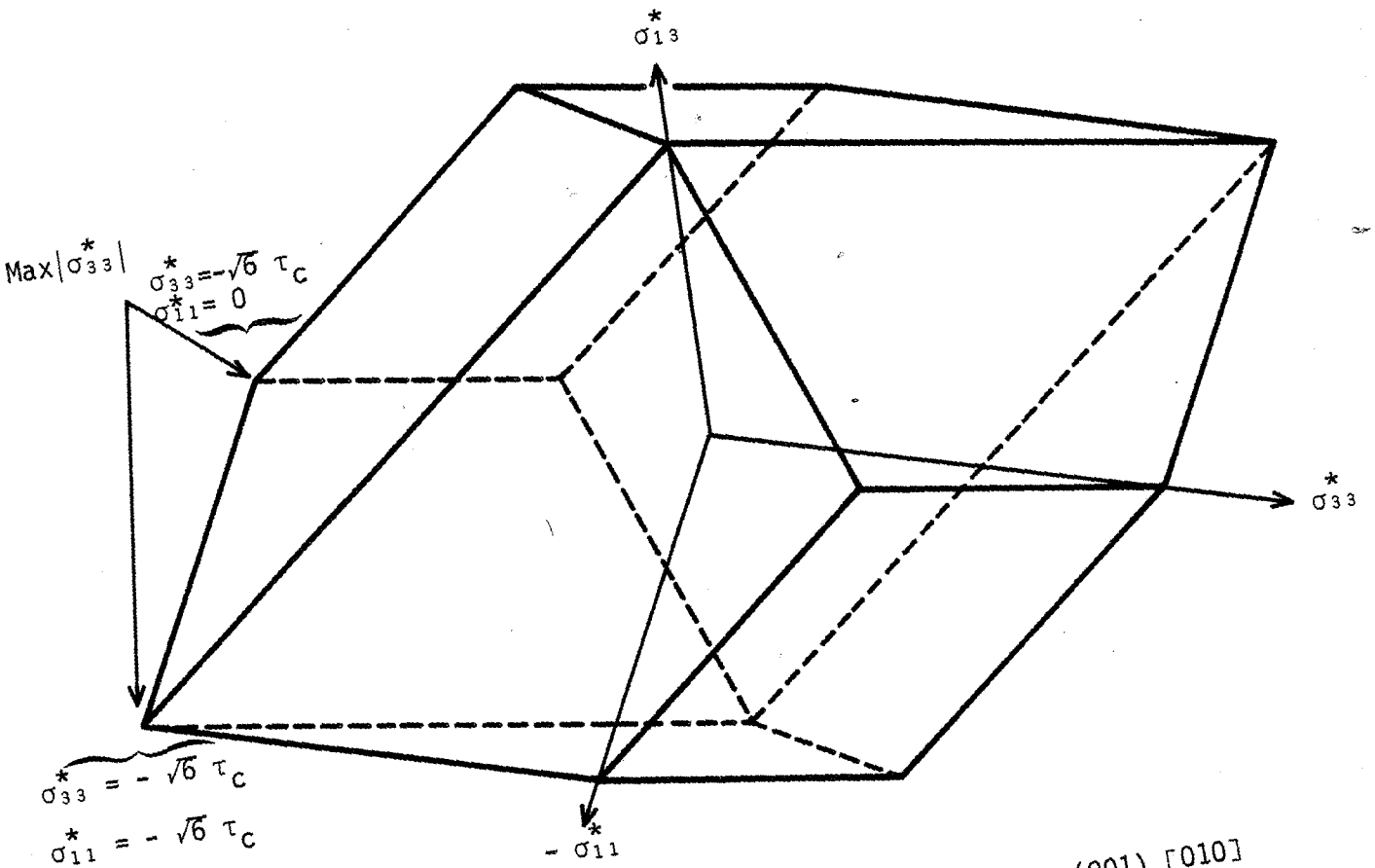
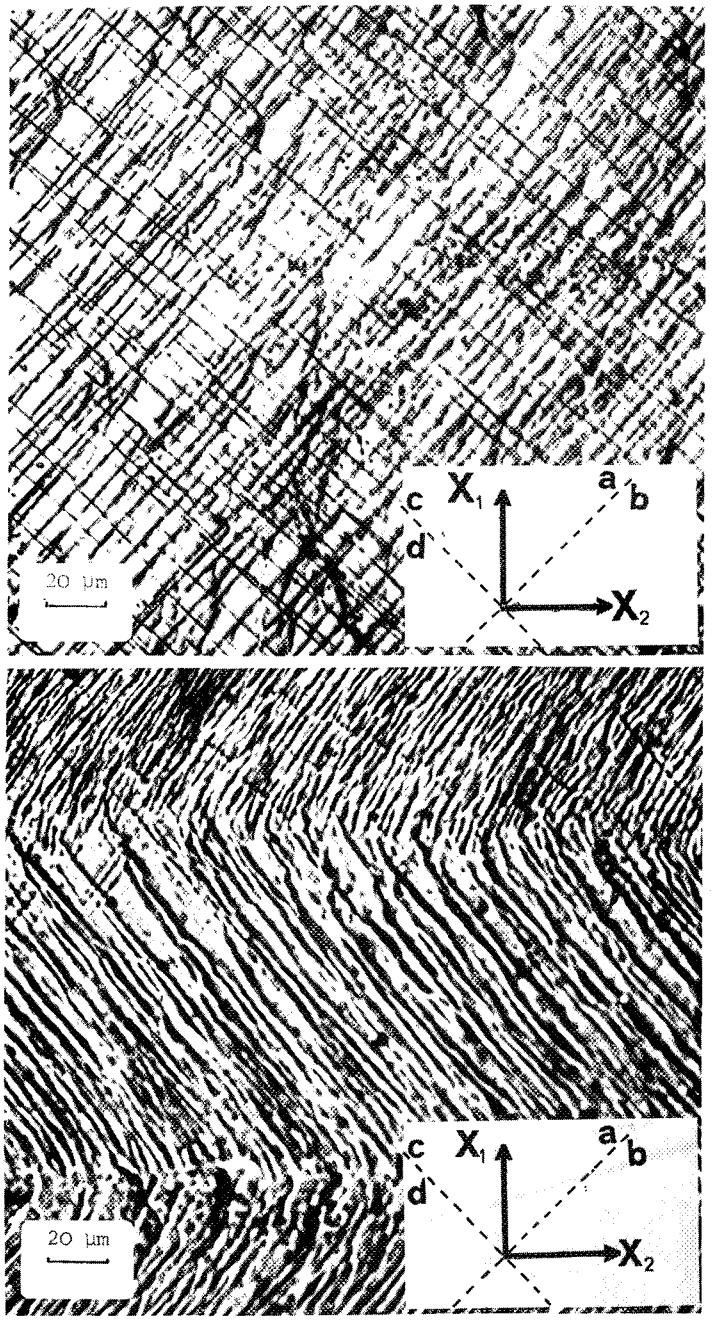


FIGURE 46 - Polyèdre critique de l'orientation initiale ≃ (001) [010]

Face - X_3
(a)



bande 1

bande 2

Face - X_3
(b)

FIGURE 47 - Traces des plans de glissement observées sur la face de compression ($-X_3$). Orientation initiale ≃ (001) [010]

(a) $\overline{\varepsilon} \simeq 0,1$

(b) $\overline{\varepsilon} \simeq 0,4$ (apparition de bandes de déformations)

Expérimentalement, les deux cisaillements mesurés e^*_{12} et e^*_{23} sont très faibles mais la déformation devient rapidement hétérogène à cause de l'apparition de bandes de déformations. En effet, pour des déformations rationnelles $\bar{\varepsilon} > 0,3$, toute la surface comprimée est recouverte, dans le sens de la longueur X_2, de bandes de largeur 0,2 mm environ *(figure 47)*. Dans chaque bande, les traces des plans de glissement correspondent soit aux plans a et b (bandes 1) soit aux plans c et d (bandes 2).

Cette hétérogénéité de la déformation conduit à une décomposition de l'orientation initiale en plusieurs orientations, mise en évidence par un astérisme très prononcé dans les diagrammes de LAUE [17] ainsi que par les figures de pôles {220} et {200} *(figures 48 et 49)*. Il semble que le premier stade de cette décomposition soit du à des rotations autour de X_1 dans les deux sens. Ultérieurement, il y a des rotations supplémentaires autour de X_1 et X_2.

Les nouvelles orientations expérimentales possèdent des énergies de déformation supérieures à $\sqrt{6}\ \tau_c\ \delta\varepsilon$ (par exemple (014) [0 4 $\bar{1}$],T = 2,78 $\tau_c\ \delta\varepsilon$), c'est-à-dire que dans ce cas, les rotations expérimentales entrainent une augmentation de l'énergie de déformation. On en conclut que le calcul de minimisation de dT effectué sans tenir compte des éventuelles hétérogénéités de glissements (liées sans doute à des intéractions de dislocations particulières), ne conduit pas à la solution réelle pour cette orientation.

Orientations $\sim$ (001) [$\bar{1}$ 10 $\bar{1}$] et $\sim$ (001) [1 4 0].

Ces deux orientations, tournées respectivement de 8 et de 14 degrés autour de (001), se comportent expérimentalement comme pour (001) [0 1 0]. A titre d'exemple, le polyèdre critique *(figure 50)* pour l'orientation (001) [$\bar{1}$ 10 $\bar{1}$] indique un sommet d'énergie $\sqrt{6}\ \tau_c\ \delta\varepsilon$ avec 8 systèmes à l'état critique (a_1 ; $-a_2$; b_1 ; $-b_2$; c_1 ; $-c_2$; d_1 ; $-d_2$) dont seuls les quatres systèmes (a_1 ; b_1 ; c_1 ; d_1) sont susceptibles de glisser. Le deux orientations se déforment, après $\bar{\varepsilon} \simeq 0,3$ avec formation de bandes de déformation de même nature que pour l'orientation (001) [0 1 0].

Par contre, lorsque la direction X_2 s'éloigne encore plus de [0 1 0], la déformation reste relativement homogène, comme pour l'orientation $\simeq$(001) [2 5 0] à 22° de [0 1 0].

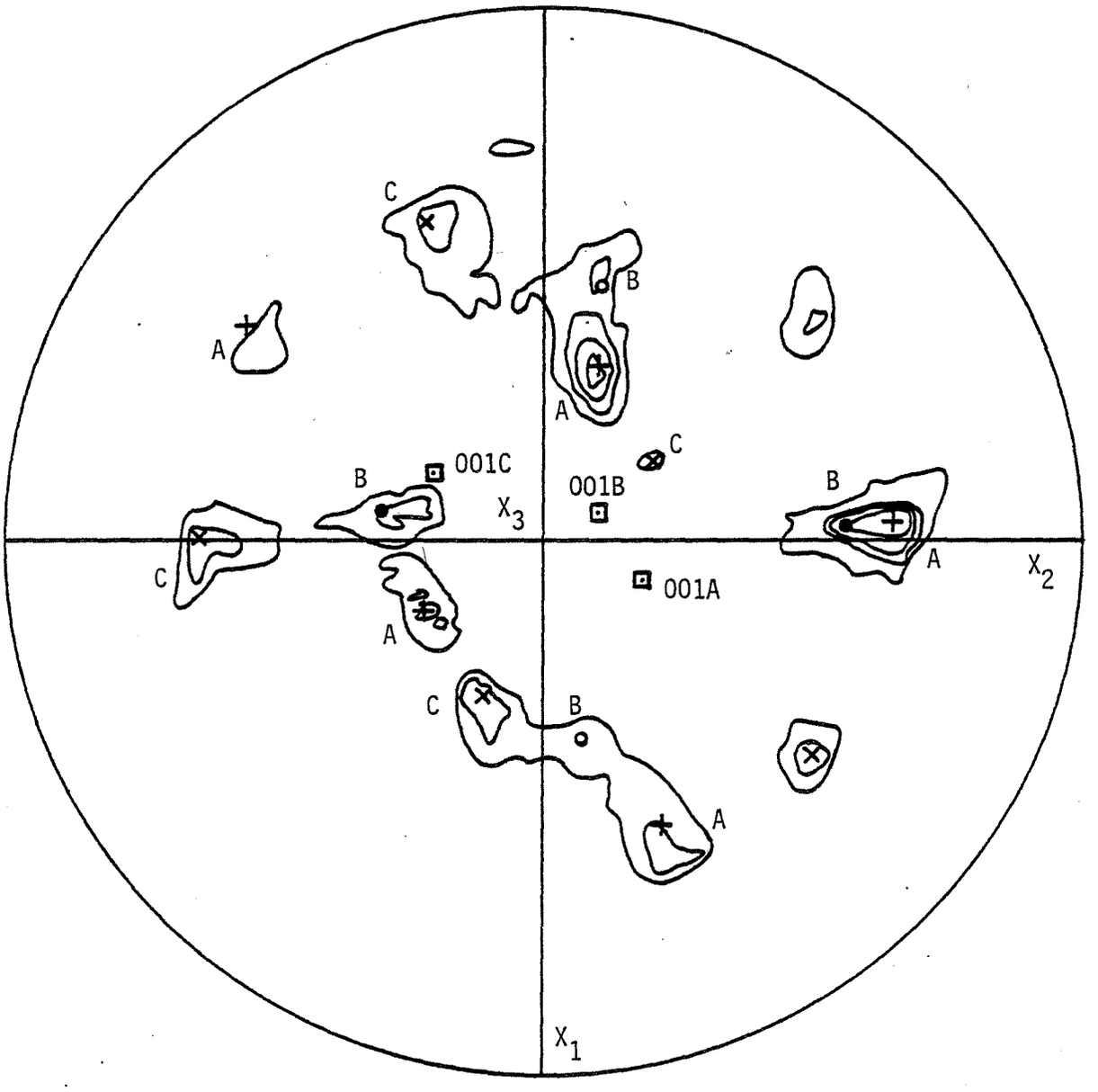


FIGURE 48 - Figures de pôles {220} à $\bar{\varepsilon} = 1$ du monocristal d'orientation initiale ≃ (001) [010] déformé en compression plane

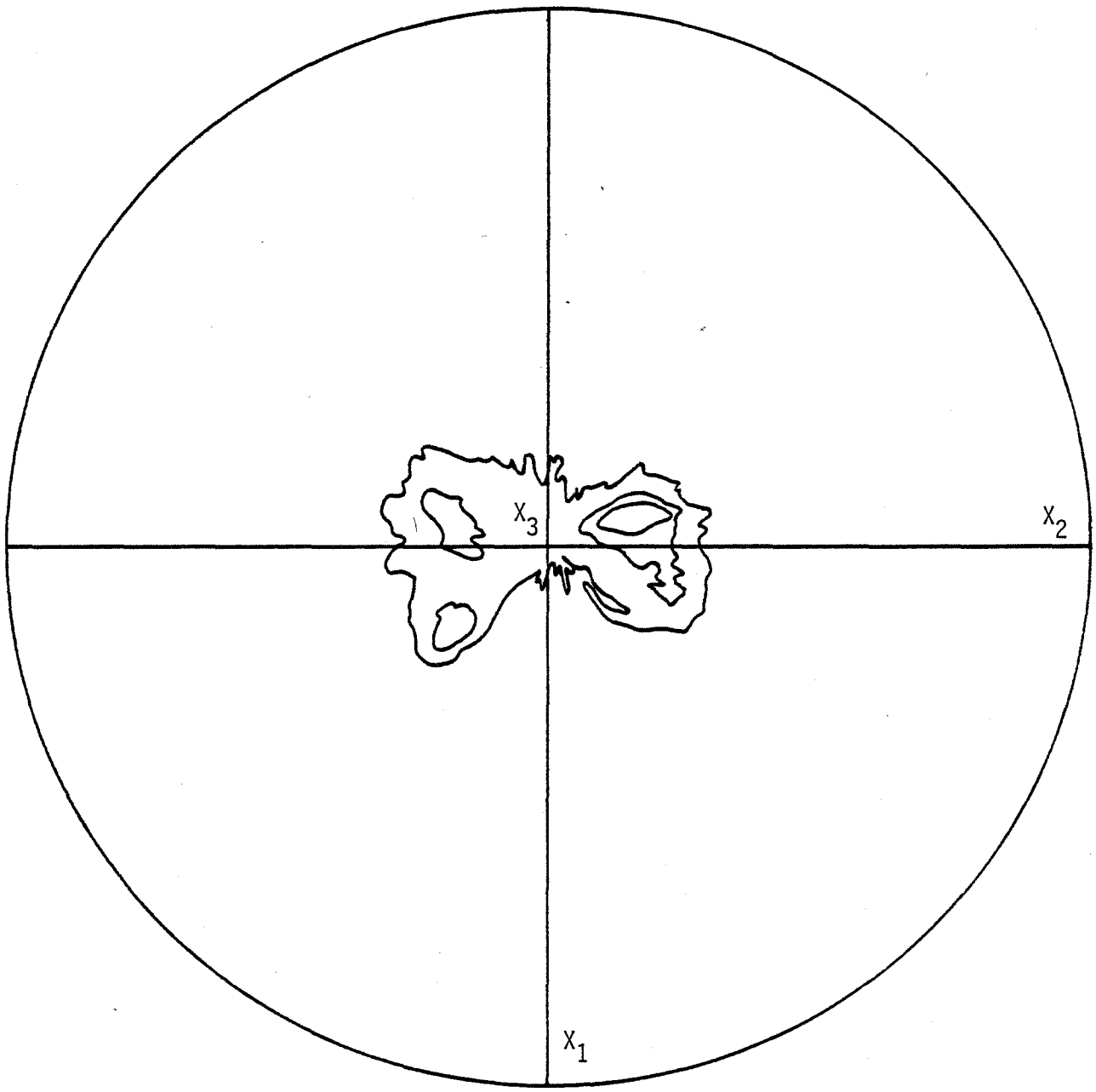


FIGURE 49 - Figure de pôles {200} à $\overline{\varepsilon}$ = 1 de l'orientation initiale ≃ (001) [010] déformée en compression plane

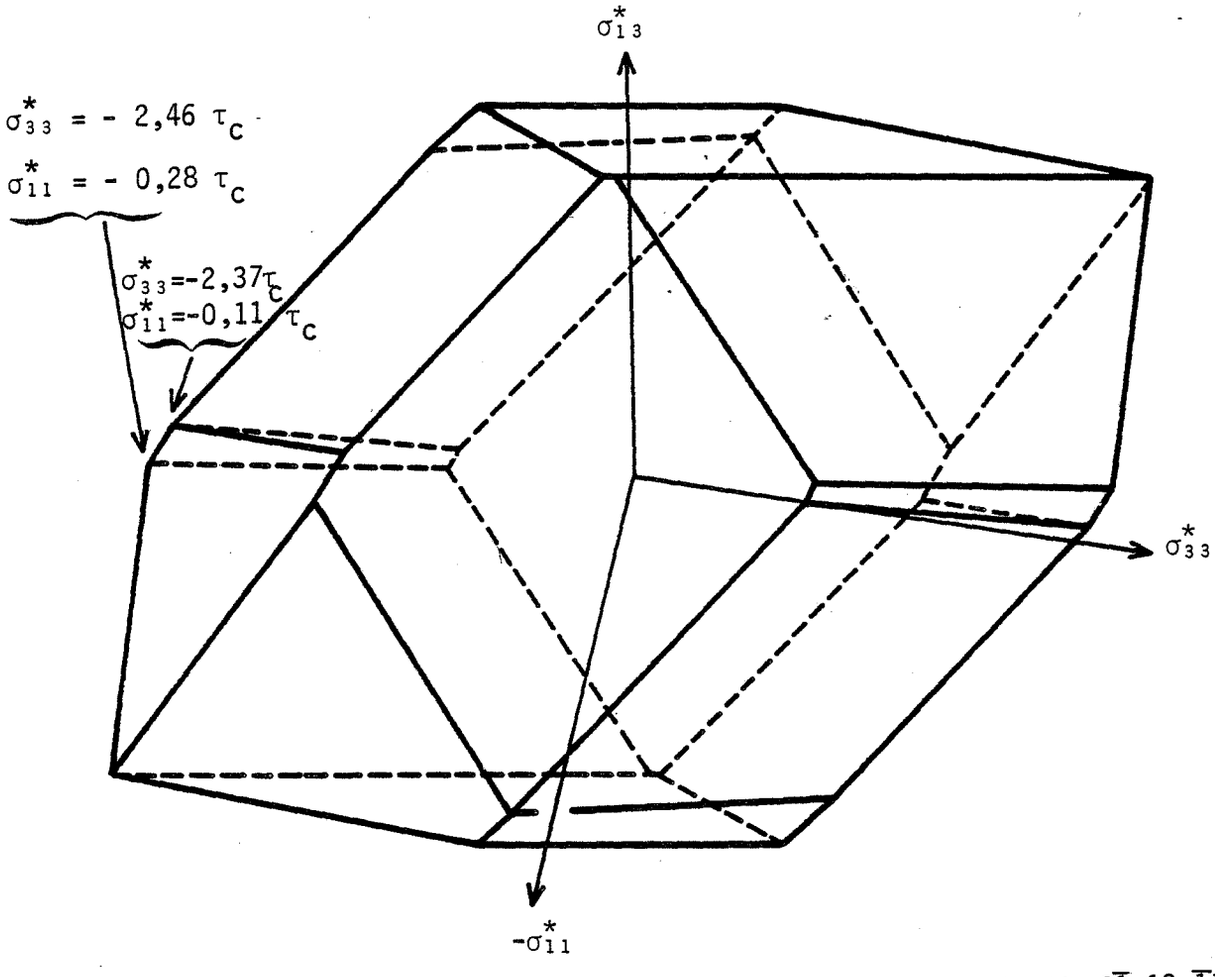


FIGURE 50 - Polyèdre critique de l'orientation initiale ≃ (001) [$\bar{1}$ 10 $\bar{1}$]

Orientation ∿ (001) [2 5 0].

D'après le polyèdre critique *(figure 51)*, deux sommets d'énergie de déformation respective 2,46 τ_c $\delta\varepsilon$ et 2,36 τ_c $\delta\varepsilon$ sont très proches. Si l'on considère le sommet possèdant l'énergie maximale, 3 systèmes (c_1 ; $-c_2$; d_1) sont à l'état critique mais 3 autres systèmes (a_1; $-a_2$; b_1) ont des cissions réduites $\tau \geq 0{,}95\ \tau_c$. Si l'on admet que les 6 systèmes (a_1;$-a_2$;b_1;c_1;$-c_2$ et d_1) sont susceptibles de glisser, le calcul itératif de minimisation de dT entraine une rotation importante vers l'orientation ∿ ($\overline{1}\overline{1}2$) [1 3 2] dont l'énergie de déformation plastique est de l'ordre de 3,0 τ_c $\delta\varepsilon$. Les cisaillements théoriques sont relativement faibles ($e^*_{12} \simeq 0{,}2$ et $e^*_{23} \simeq -0{,}13$ à $\overline{\varepsilon} = 1$) en accord avec les valeurs mesurées ($e^*_{12} \simeq 0{,}1$ et $e^*_{23} \simeq -0{,}1$ à $\overline{\varepsilon} = 1$). Expérimentalement, la déformation reste homogène jusqu'à des déformations importantes $\overline{\varepsilon} = 1$, avec une rotation vers l'orientation ∿ ($\overline{1}\overline{1}3$) [1 5 2], proche de la rotation théorique *(figure 52)*.

Remarques :

Les courbes contrainte-déformation des quatres orientations du type (001) [u v w] sont présentées à la *figure 53*. On constate que le durcissement est presque linéaire, à la différence de la plupart des autres orientations qui possèdent un domaine de déformation plastique, $0{,}2 < \overline{\varepsilon} < 0{,}6$, où la consolidation est presque nulle.

D'après cette étude sur le plan de compression (001) on peut faire les remarques suivantes :

- Pour les orientations dont l'axe d'allongement X_2 fait un angle avec [0 1 0] inférieur à ∿ 20°, la déformation á lieu de façon inhomogène par formation de bandes allongées dans la direction X_2 ; la méthode de minimisation de dT pour la calcul des rotations ne s'applique pas à ces cas. Il faudra, pour ces orientations de haute symétrie, tenir compte de la nature des interactions entre les nombreux systèmes de glissement possibles.
- Pour l'orientation tournée de 22° autour de (001), la déformation reste homogène jusqu'à des déformations rationnelles importantes. Dans ce cas, l'accord entre les prévisions théoriques de

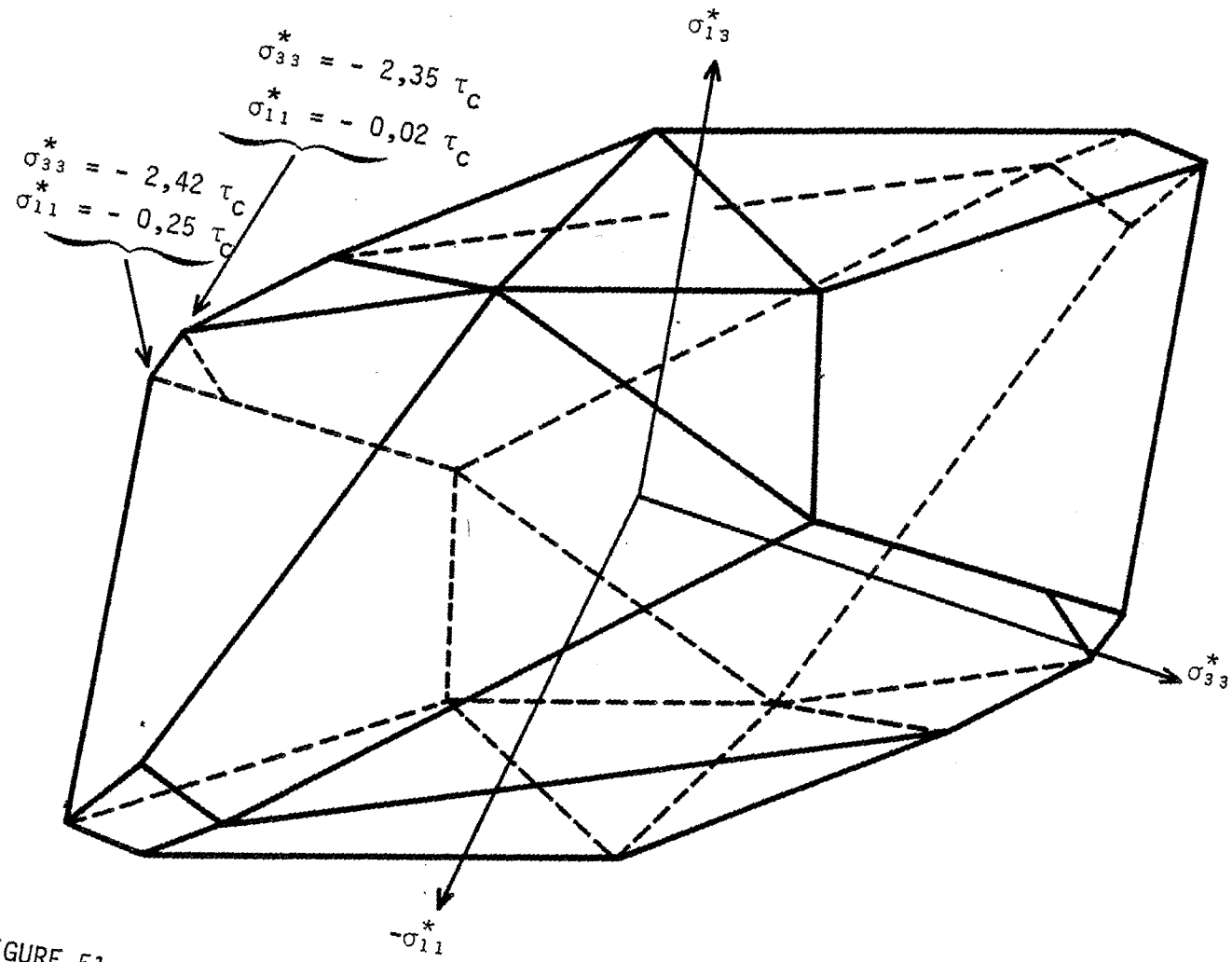


FIGURE 51 - Polyèdre critique de l'orientation initiale ≃ (001) [2 5 0]

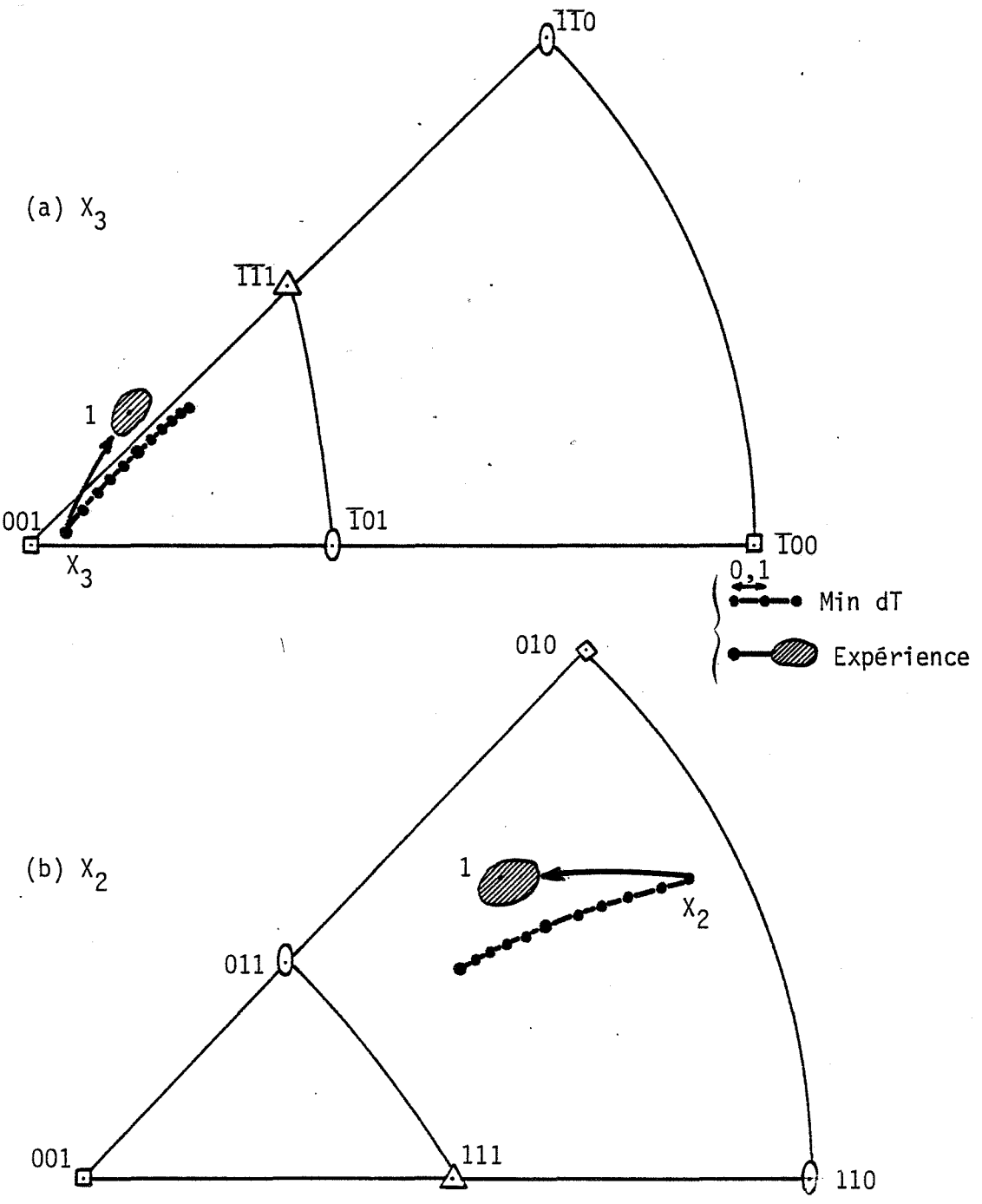


FIGURE 52 - Rotations théoriques et expérimentales de l'orientation initiale ≃ (001) [250]

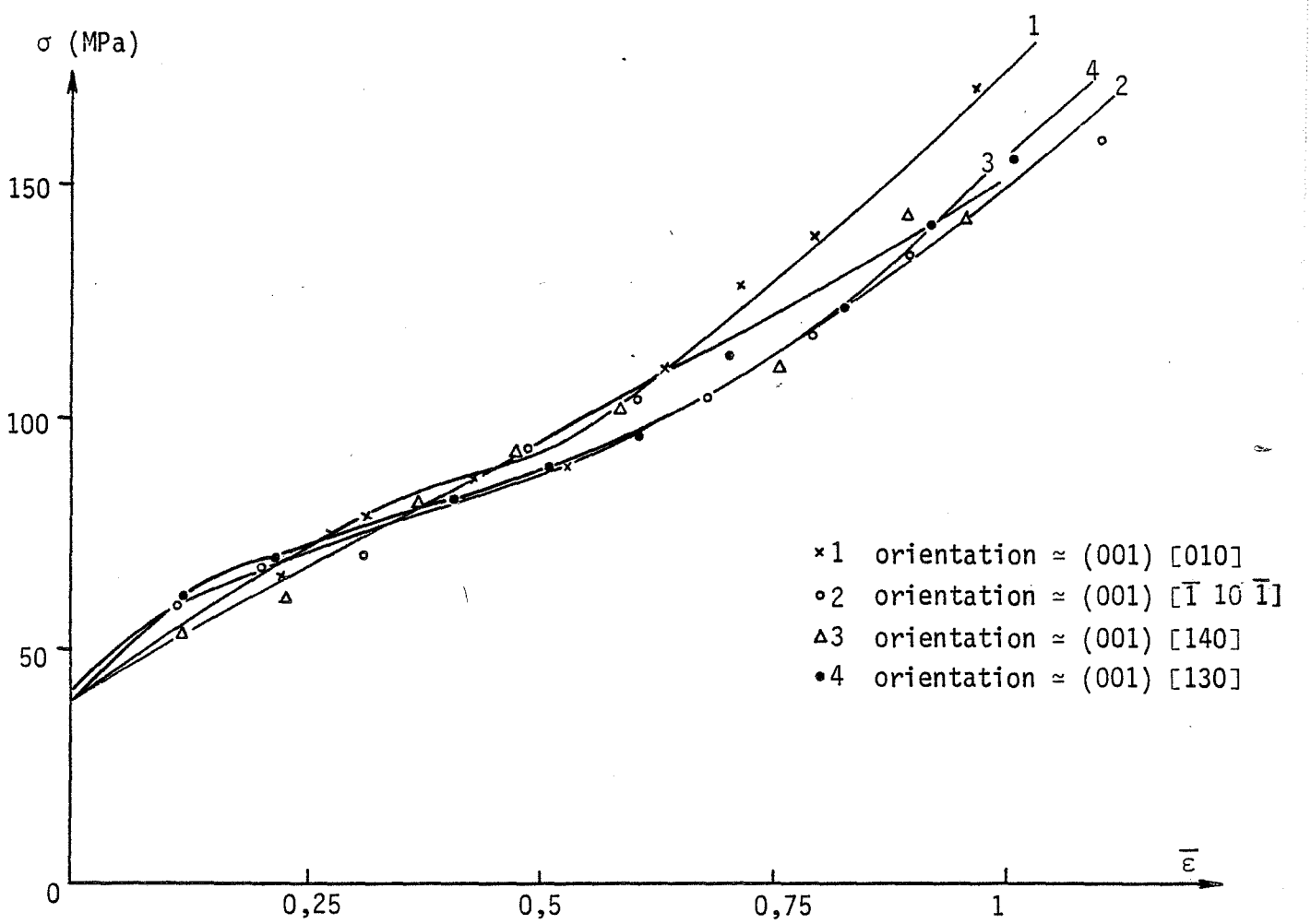


FIGURE 53 - Courbes contraintes-déformations de monocristaux d'orientation de haute symétrie du type (001) [u v w]

minimisation de dT et l'expérience est satisfaisant en ce qui concerne les cisaillements e^*_{12} et e^*_{23} et la rotation cristalline.

III.1.3 - ORIENTATIONS DE FAIBLE SYMETRIE.

Cinq orientations de faible symétrie, répertoriées MA, MB, MC, MD et ME ont été testées. Les énergies de déformation T_0 et les systèmes de glissement initialement à l'état critique sont précisés dans le *Tableau IV*.

Orientation MA ≃ (358) [$\bar{8}$ $\bar{3}$ 5].

Le polyèdre critique pour cette orientation *(figure 54)* présente deux sommets très voisins qui possèdent pratiquement les mêmes états de contraintes avec $|\sigma^*_{33}|$=3,154 et 3,146 τ_c respectivement *(Tableau IV)*. Si l'on prend le sommet de $|\sigma^*_{33}|$ maximum, 3 systèmes (a_1, c_3, d_1) sont à l'état critique, et 2 autres systèmes ($-a_2$, $-c_2$) sont sollicités à des contraintes proches de τ_c (0,98 τ_c exactement).

Avec le critère de sélection des $\delta\gamma^l$ possibles ($\tau^k \geq 0{,}9\ \tau^l_c$), les calculs successifs de minimisation de dT conduisent à des solutions qui oscillent entre deux sommets (l'un étant à 3 systèmes : a_1, $-a_2$, c_3 et l'autre à 5 systèmes : a_1, $-a_2$, $-c_2$, c_3, d_1). Ces oscillations influent légèrement sur la trajectoire théorique de l'orientation *(Figure 55)*. Néanmoins, l'orientation du cristal devrait évoluer vers l'orientation stable ≃ (011) [$\bar{2}$ 1 $\bar{1}$] avec un cisaillement e^*_{12} compris entre 0,2 et 0,3 $\bar{\varepsilon}$. Les orientations mesurées expérimentalement *(Figure 55)* confirment cette évolution. Par ailleurs, le cisaillement e^*_{12} est de 0,25 $\bar{\varepsilon}$ environ et les plans de glissement sont effectivement a et c comme prévu.

Notons pour ce cas que, si on n'admet pas la possibilité de glissement sur un système sollicité à $\tau^k < \tau^l_c$, l'orientation devrait être théoriquement stable.

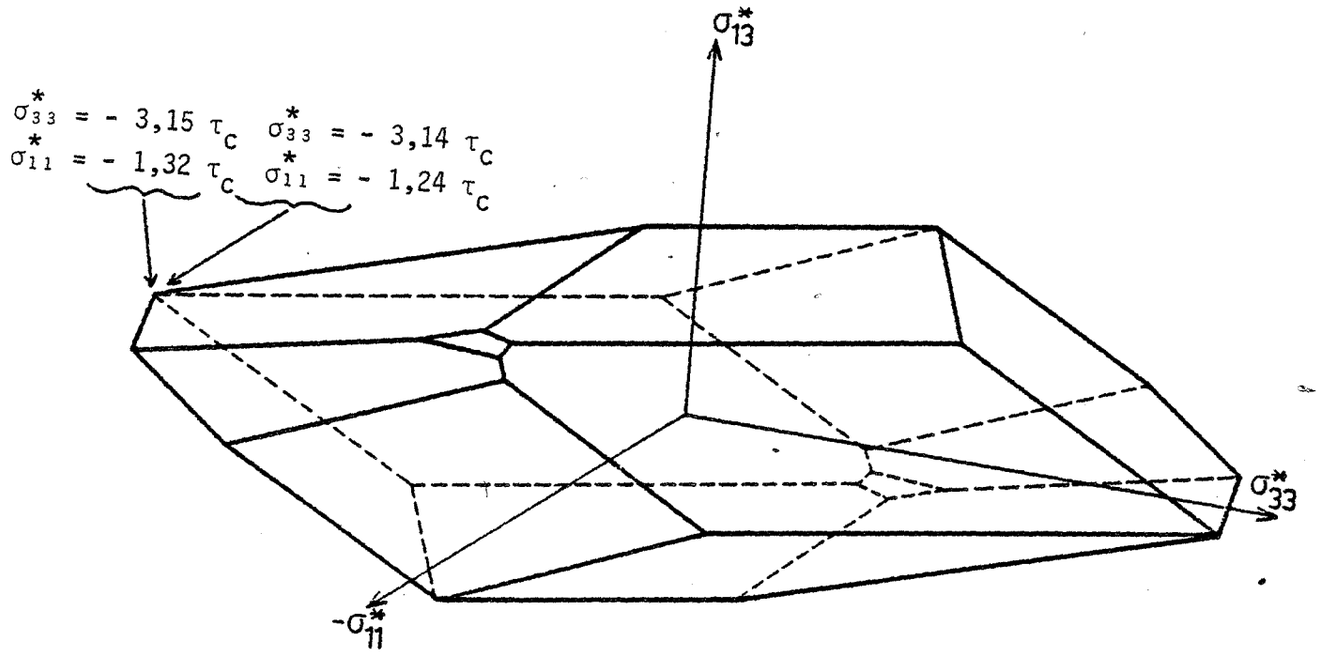


FIGURE 54 - Polyèdre critique de l'orientation initiale MA ≃ (358) [$\bar{8}\ \bar{3}$ 5]

Tableau IV : Energies et systèmes de glissement initialement à l'état critique pour les orientations MA, MB, MC, MD, ME et MF.

ORIENTATION (exacte) (approximative)	To (τ_c $\delta\varepsilon$)	SYSTEMES DE GLISSEMENT POSSIBLES
MA (30 53 79) [$\overline{82}$ $\overline{28}$ 50] ≃ (3 5 8) [$\overline{8}$ $\overline{3}$ 5]	3,154 3,146	a_1 ; c_3 ; d_1 (critère $\tau^k \geq 0,9\ \tau_c^k$: $-a_2$; $-c_2$ $-c_2$; c_3 ; d_1 (critère $\tau^k \geq 0,9\ \tau_c^k$: a_1 ; $-a_2$)
MB (10 47 88) [99 03 $\overline{13}$] ≃ (1 5 9) [9 0 $\overline{1}$]	2,369	$-a_2$; $-b_2$; b_3 ; c_3
MC (44 78 47) [$\overline{90}$ 32 31] ≃ (1 2 1) [$\overline{3}$ 1 1]	2,750	b_3 ; $-c_2$; c_3 ; $-d_2$
MD ($\overline{14}$ 21 97) [17 97 $\overline{17}$] ≃ ($\overline{2}$ 3 16) [1 6 $\overline{1}$]	2,507	a_1 ; $-a_2$; b_1 + (c_1 ; $-c_2$, d_1 si $\tau^1 \geq 0,9\ \tau_c$)
ME (36 45 85) [12 86 $\overline{46}$] ≃ (1 1 2) [1 7 $\overline{4}$]	3,247	$-a_2$; $-c_2$; $-d_3$

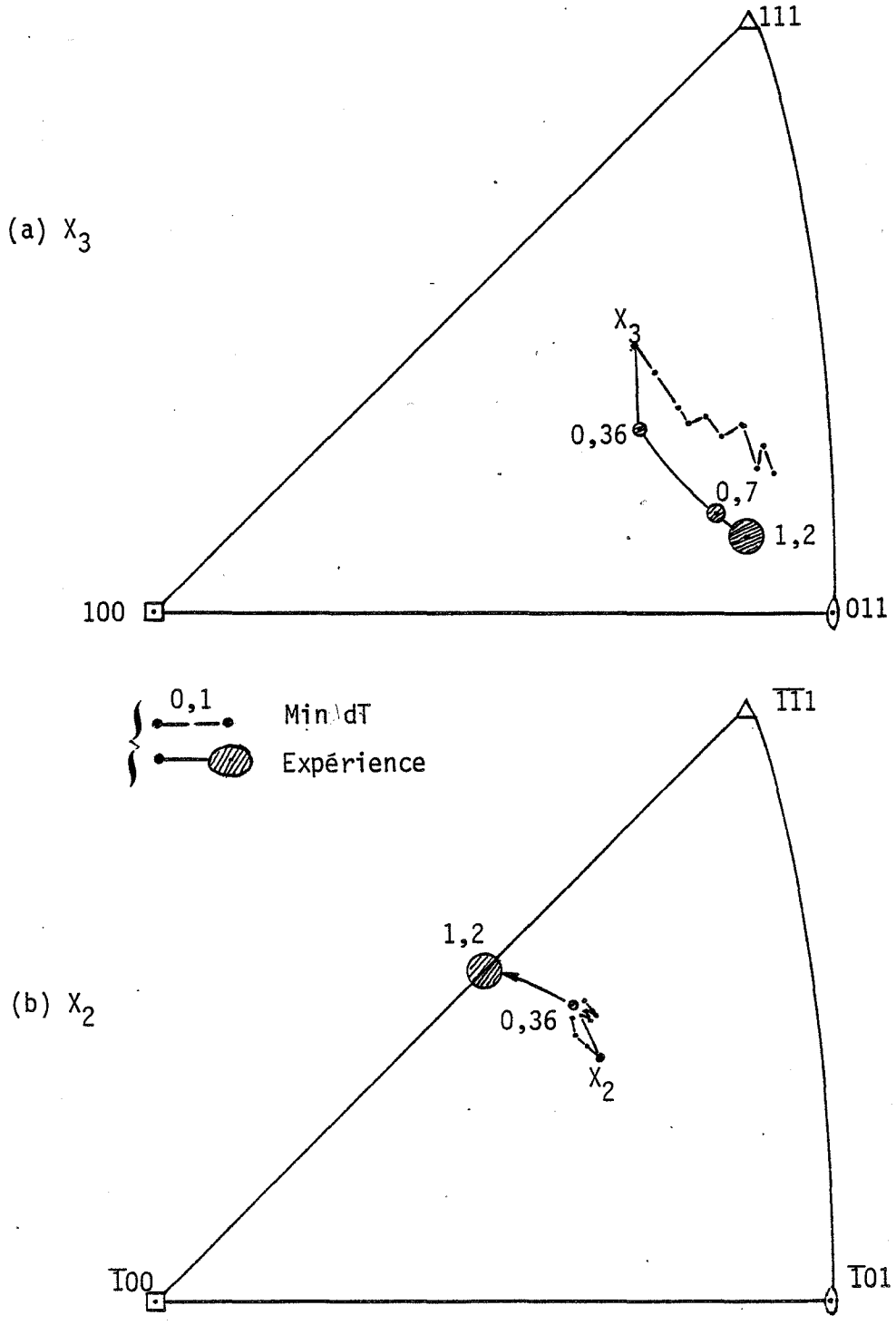


FIGURE 55 - Rotations théoriques et expérimentales de l'orientation initiale MA ≃ (358) $[\bar{8}\bar{3}\bar{5}]$ (pas de déformation $\delta\varepsilon$ = 0,05).

Orientation MB ≃ (159) [9 0 $\bar{1}$]

Cette orientation, proche d'une orientation de haute symétrie (012) [1 0 0], pose des problèmes de minimisation de dT ($\delta\gamma^l$) sur ordinateur pour deux raisons :

- *l'énergie de déformation δT qui est très faible ($\simeq 2{,}4\ \tau_c\ \delta\varepsilon$), est peu sensible à l'orientation dans cette zone, c'est-à-dire que la fonction dT ($\delta\gamma^l$) devrait être presque stationnaire (si on ne tient pas compte de la consolidation des systèmes actifs) ;*
- *quatre systèmes sont initialement à l'état critique, $\tau^l = \tau_c^l$, mais plusieurs autres systèmes sont sollicités à des contraintes légèrement inférieures à τ_c^l et donc susceptibles d'entrer en jeu.*

Le calcul effectué avec un critère de sélection des systèmes $\tau^l = \tau_c^l$ prévoit :

- *une rotation faible vers (011) [5 1 $\bar{1}$] à $\bar{\varepsilon} = 1$,*
- *un glissement essentiellement sur $-a_2$, $-c_2$ et c_3,*
- *des cisaillements : e_{12}^* faible et négatif, e_{23}^* relativement fort ($\sim 0{,}4\ \bar{\varepsilon}$) et positif.*

Expérimentalement on constate une légère rotation vers (011) [1 0 0] en accord raisonnable avec ces calculs en ce qui concerne le plan de compression mais légèrement différent pour l'axe d'allongement X_2. Les cisaillements mesurés *(Figure 56)* sont : $e_{12}^* \simeq -0{,}13\ \bar{\varepsilon}$ et $e_{23}^* \simeq 0{,}6\ \bar{\varepsilon}$ également en très bon accord. A de faibles déformations, tous les plans de glissement sont détectés avec, peut être, des glissements plus forts sur les plans a et c.

Orientation MC ≃ (121) [$\bar{3}$ 1 1].

Cette orientation est extrêmement instable et devrait évoluer, selon nos calculs, par des rotations très importantes vers l'orientation stable ∿ (011) [$\bar{8}$ $\bar{1}$ 1] à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}5$ *(Figure 57)*. Le polyèdre critique de cette orientation est présenté à la *figure 29, Chapitre II*. Les systèmes de glissement actifs, initialement au nombre de trois, ($\delta\gamma\ (b_3) = 0$), évoluent avec cette rotation

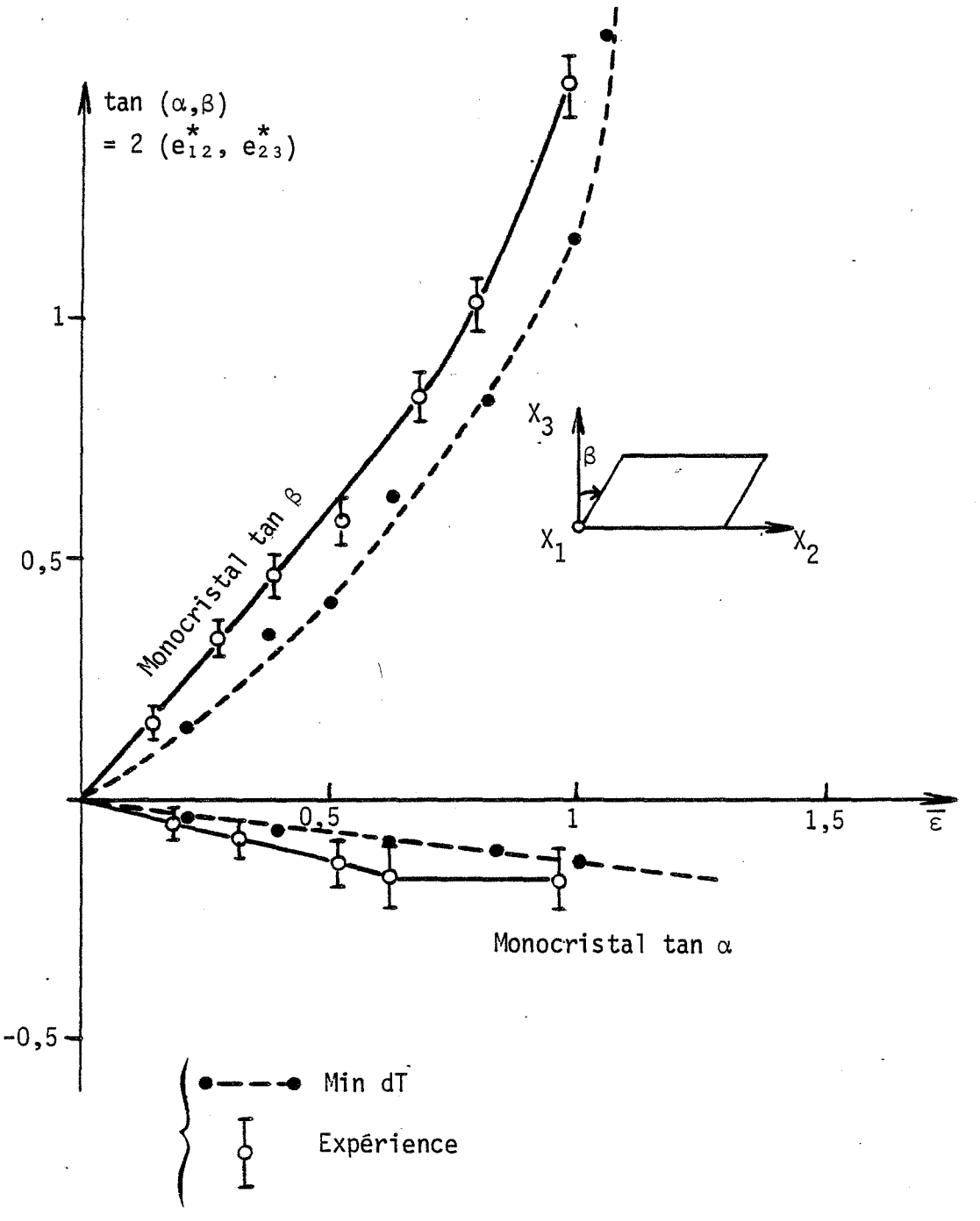


FIGURE 56 - Cisaillements e^*_{12} et e^*_{23} théoriques et expérimentaux du monocristal d'orientation initiale MB ≃ (159) [90$\bar{1}$]

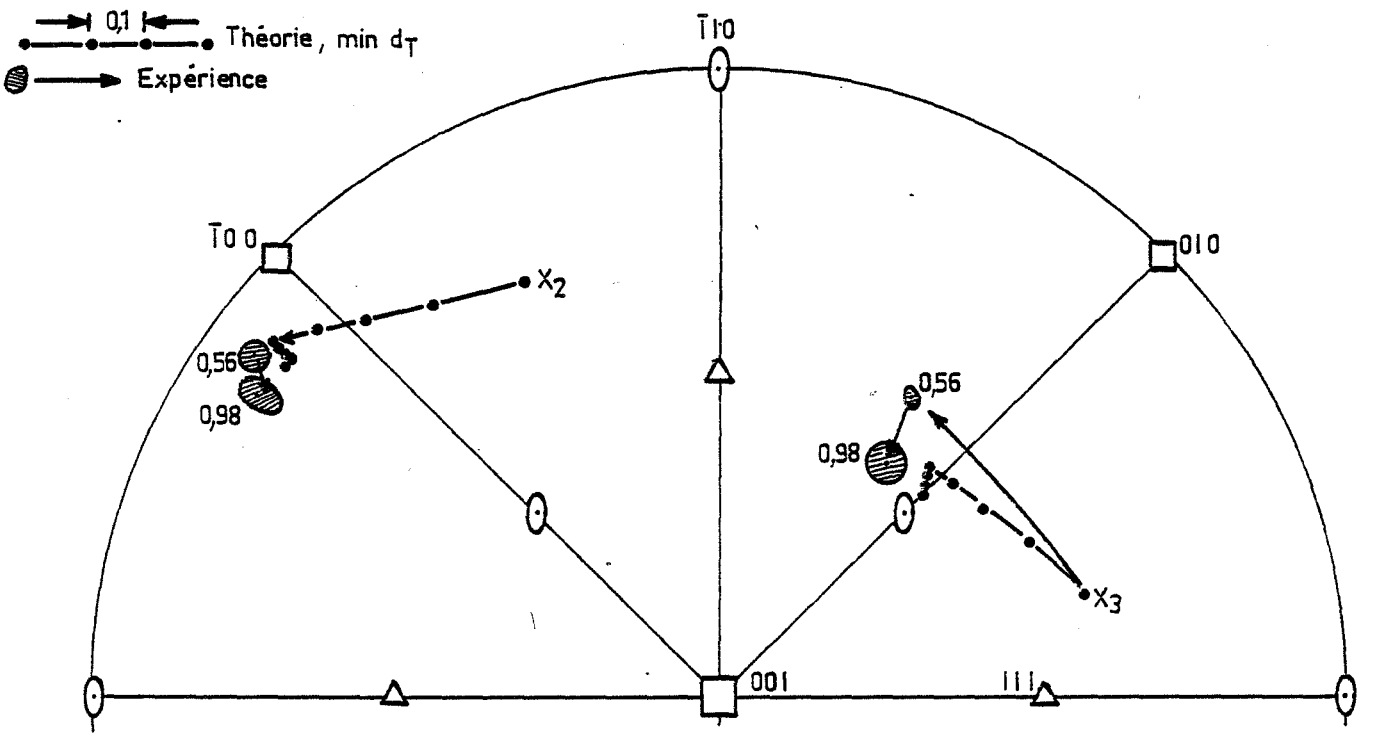
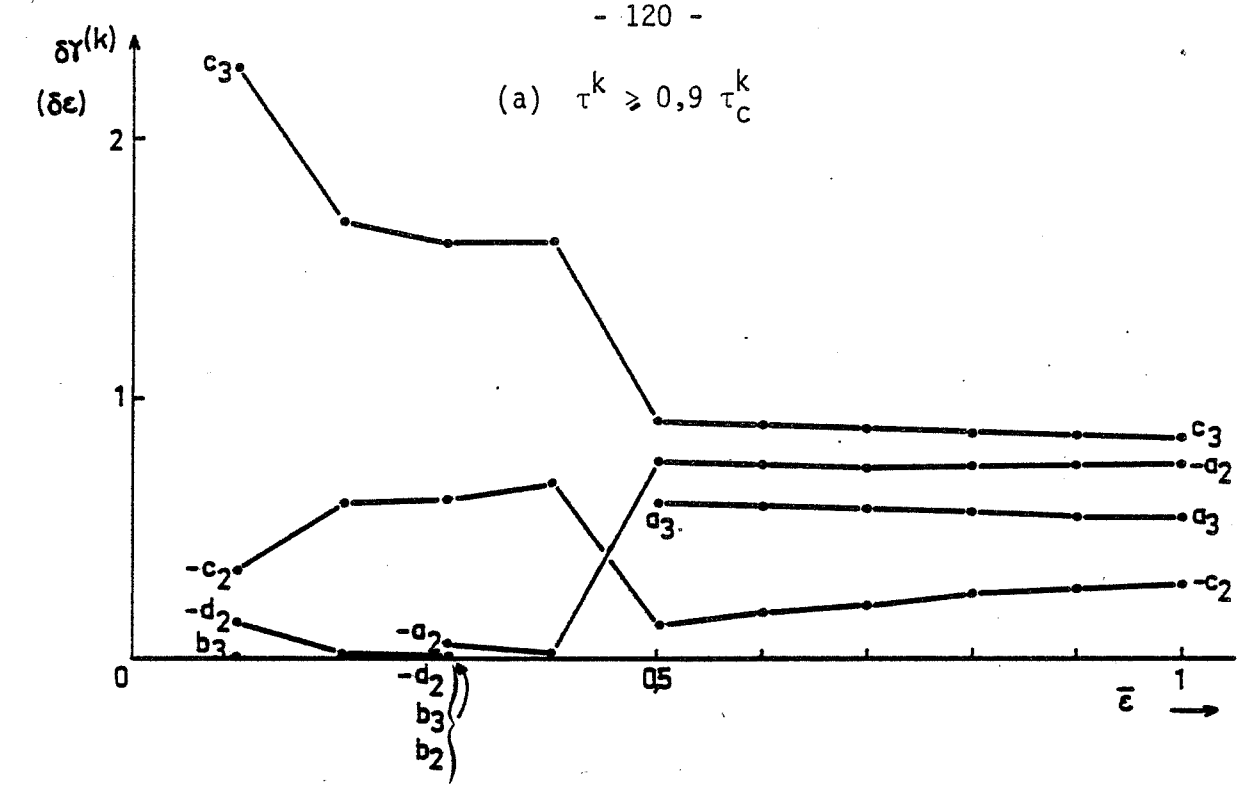


FIGURE 57 - Rotations théoriques et expérimentales de l'orientation initiale MC ≃ (121) [$\bar{3}11$]



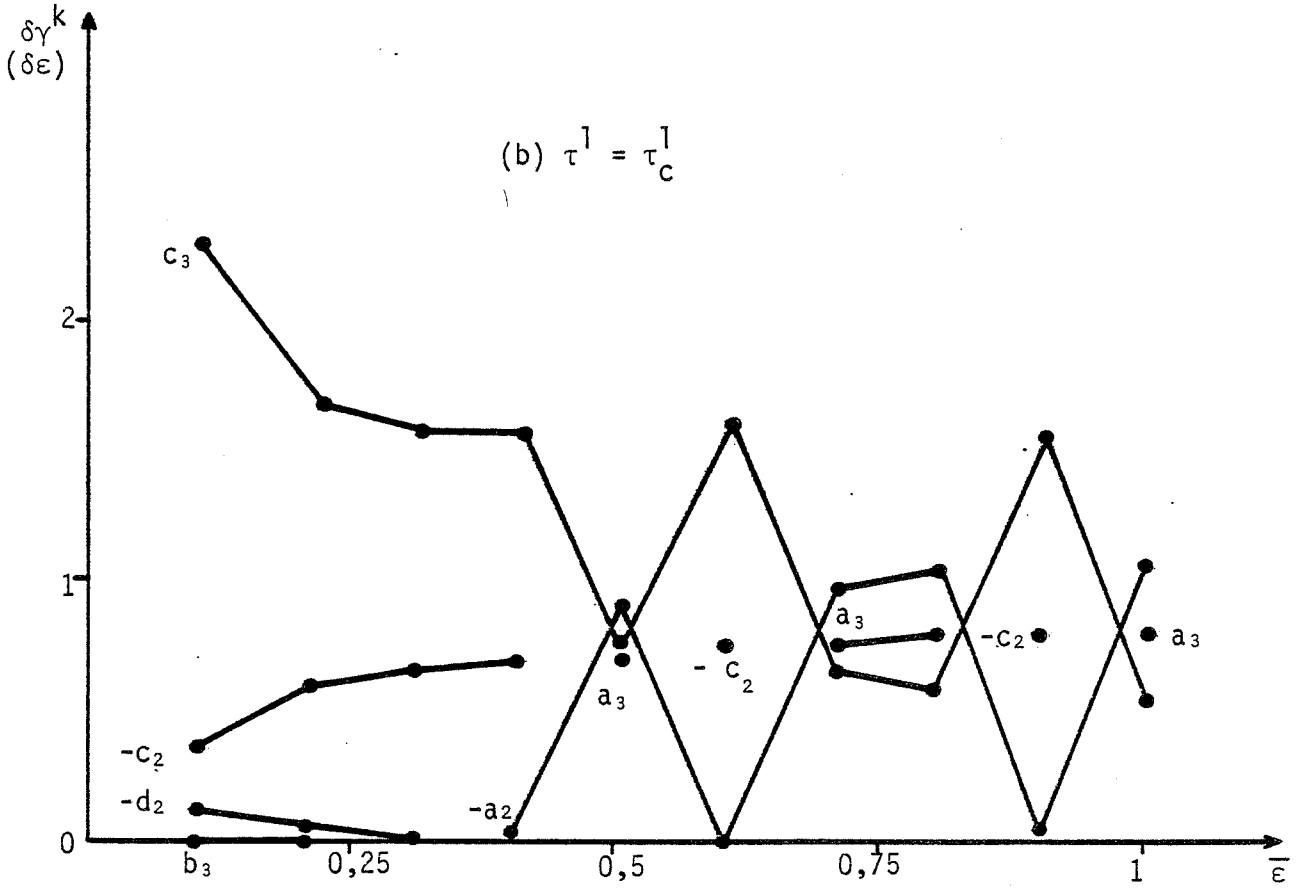


FIGURE 58 - Evolution des amplitudes théoriques de glissement $\delta\gamma^l$ en fonction de la déformation, orientation initiale MC ≃ (121) [$\bar{3}$11].

vers une autre combinaison à quatre systèmes de glissement ($-a_2$, a_3, $-c_2$ et c_3) tous actifs à l'orientation stable $\sim$ (011) [$\bar{8}$ $\bar{1}$ 1] *(Figures 57 et 58)*. Bien que le critère de continuité des glissements $\delta\gamma^l$ ne soit pas rigoureusement respecté pour toute la déformation, il l'est dans deux régions distinctes à conditions que le critère de sélection des systèmes critiques soit $\tau^k \geq 0{,}9\ \tau_c^k$ *(Figure 58(a))*. Par contre si l'on prend $\tau^l = \tau_c^l$, *(Figure 58(b))*, on trouve des discontinuités pour les systèmes actifs $\delta\gamma^l$.

L'expérience montre un très bon accord avec les prévisions théoriques pour les rotations et les glissements :

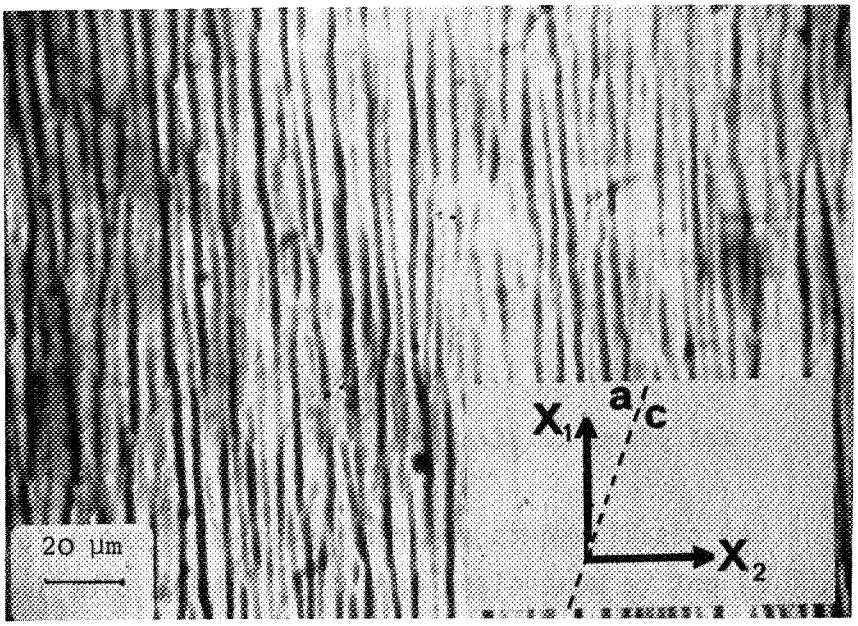
- *une rotation $\sim 30°$ vers (011) [$\bar{8}$ $\bar{1}$ 1], Figure 57.*
- *des plans de glissement a et c à $\bar{\varepsilon} = 0{,}98$, Figure 59.*

Les cisaillements mesurés expérimentalement ($e_{12}^* \simeq -0{,}18\ \bar{\varepsilon}$ et $e_{23}^* \simeq -0{,}35\ \bar{\varepsilon}$) ont le même signe mais des valeurs plus importantes que celles prévues théoriquement par la minimisation de dT *(Figure 60)*. Cet écart entre les valeurs théoriques et expérimentales résulte peut être du fait que le plan de compression s'éloigne de l'axe 001 - 010 d'une façon plus importante que prévu théoriquement *(Figure 57)*.

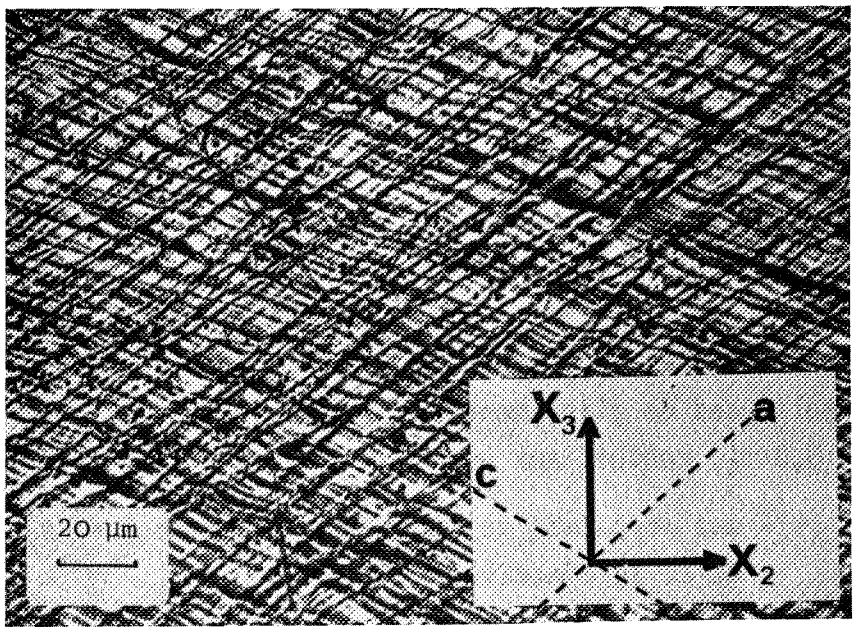
Orientation MD $\sim$ ($\bar{2}$ 3 16) [1 6 $\bar{1}$].

Le polyèdre critique de cette orientation est présenté à la *figure 61*. 3 systèmes (a_1 ; $-a_2$; b_1) sont initialement à l'état critique, $\tau^l = \tau_c^l$, et trois autres (c_1 ; $-c_2$; d_1) sont à $\tau^k = 0{,}92\ \tau_c^k$ *(Tableau IV)*. Le calcul des amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ qui minimisent dT en tenant compte du critère $\tau^k \geq 0{,}9\ \tau_c^l$, conduit aux prédictions suivantes :

- *une amplitude de glissement importante du système b_1 le long de la déformation,*
- *une rotation vers $\simeq$ ($\bar{2}$T4) [1 10 3] à $\bar{\varepsilon} = 1$ (Figure 62),*
- *un cisaillement e_{12}^* faible et positif ($\simeq +0{,}2$ à $\bar{\varepsilon} = 1$) et un cisaillement e_{23}^* initialement positif qui passe par un maximum à $\bar{\varepsilon} = 0{,}4$ pour devenir légèrement négatif ($\simeq -0{,}06$) à $\bar{\varepsilon} = 1$ (Figure 63).*



Face - X_3



Face X_1

FIGURE 59 - Traces des plans de glissement observées à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}98$, orientation initiale MC $\simeq (121)\ [\bar{3}11]$

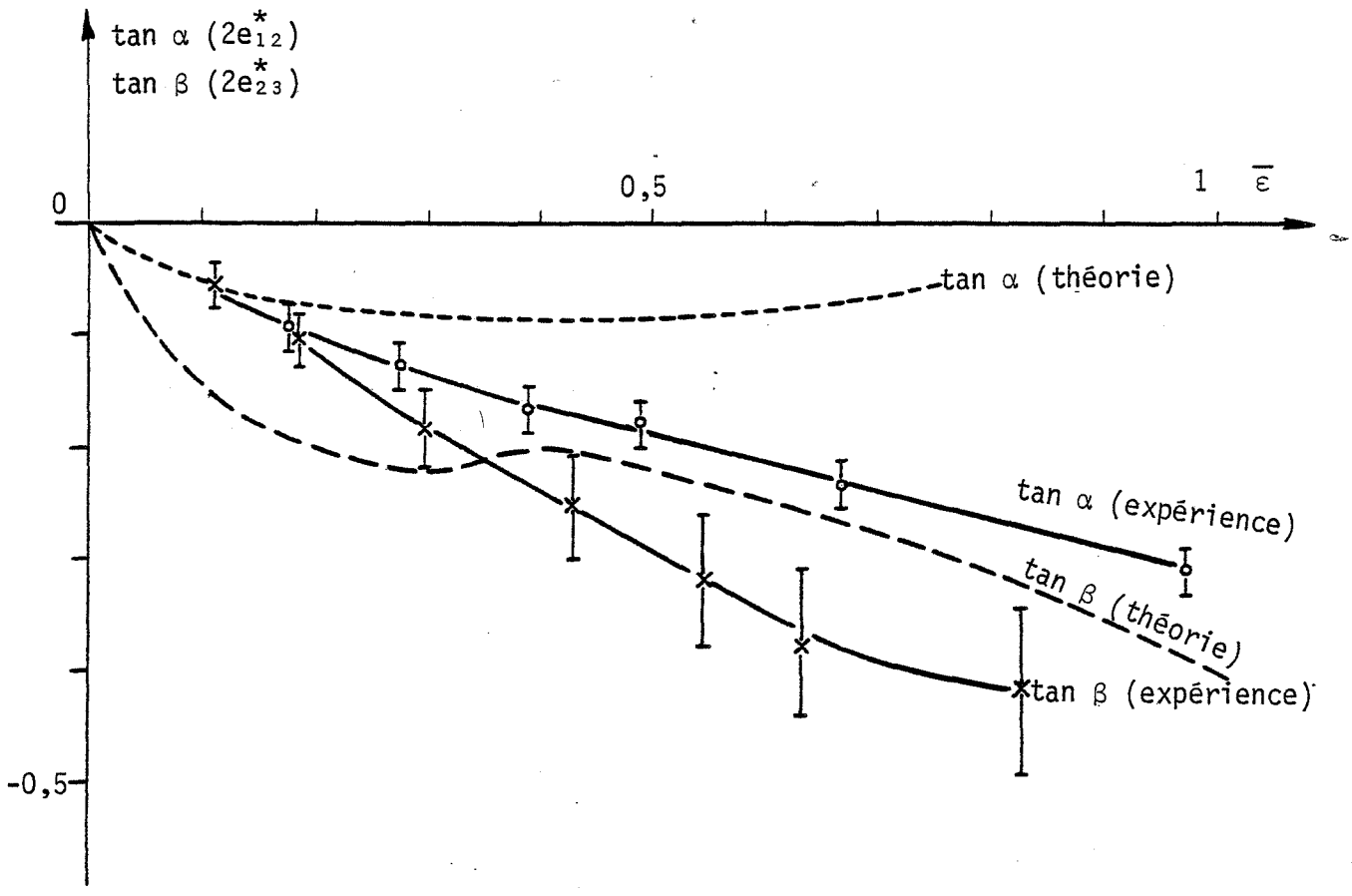


FIGURE 60 - Cisaillements théoriques et expérimentaux e^*_{12} et e^*_{23} du monocristal d'orientation initiale MC∿(121) [$\bar{3}$11]

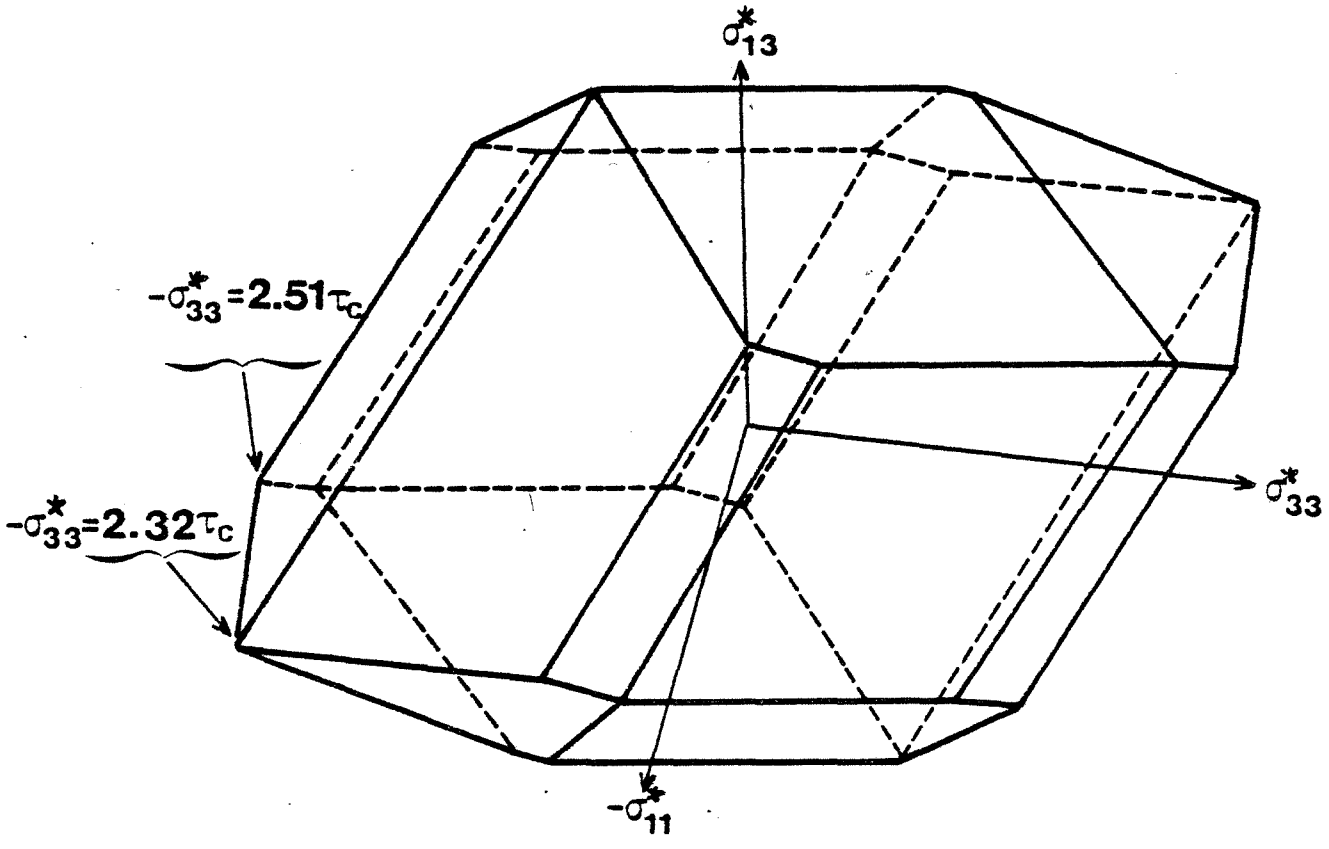


FIGURE 61 - Polyèdre critique de l'orientation initiale MD ≃ $(\bar{2}\ 3\ 15)\ [16\bar{1}]$

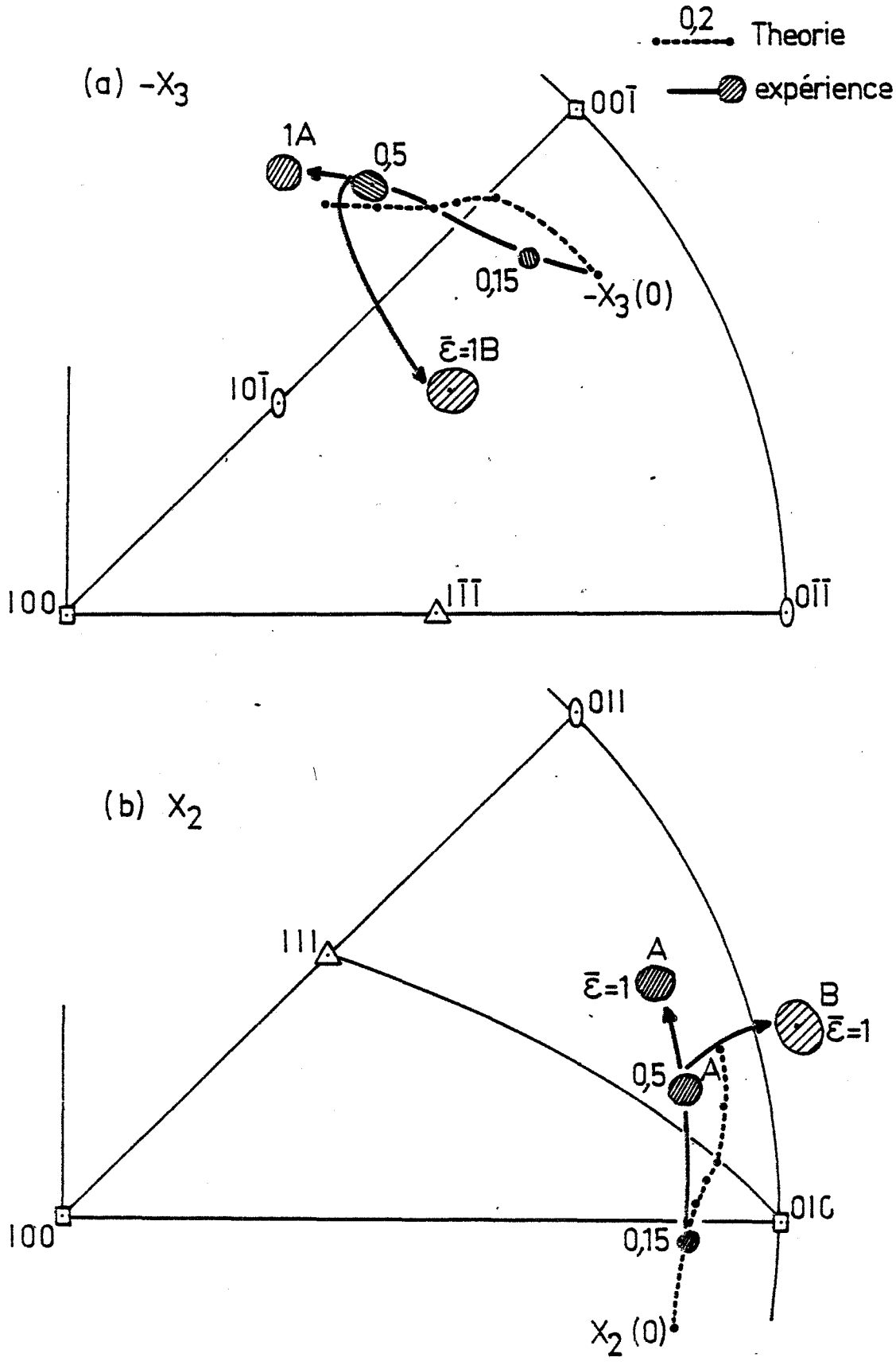


FIGURE 62 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_2 et X_3 de l'orientation initiale ≃ ($\bar{2}$ 3 16) [16$\bar{1}$]

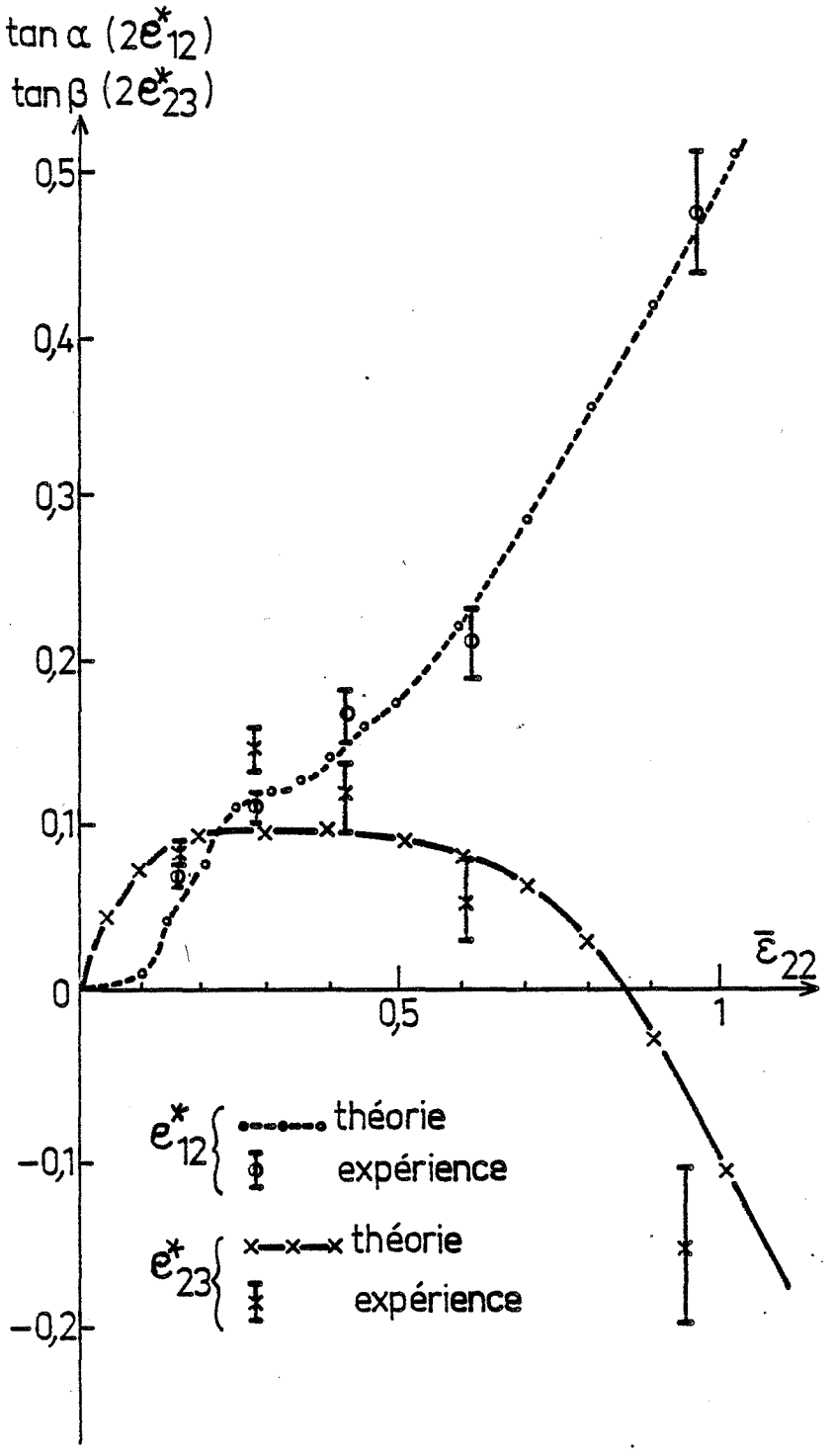


FIGURE 63 - Cisaillements e^*_{12} et e^*_{23} théoriques et expérimentaux de l'orientation initiale MD ≃ ($\bar{2}$ 316) [16$\bar{1}$] ; $\tau \geqslant 0{,}9\ \tau_c$

La figure 62 montre que l'accord entre les prévisions théoriques (en rendant dT minimale) et l'expérience est raisonnable en ce qui concerne la rotation cristalline des axes X_2 et X_3. Expérimentalement, à $\bar{\varepsilon} = 1$, il y a formation de bandes de déformation : le cristal se partage en deux orientations différentes, l'orientation prédominante étant l'orientation A ≃ $(\bar{4}39)$ [1 8 3] proche de celle prévue théoriquement *(Figure 64)*.

La figure 63, montre que les cisaillements e^*_{12} et e^*_{23} mesurés sont en très bon accord avec les prévisions théoriques, en particulier le cisaillement e^*_{23} initialement positif change de direction à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}4$ pour devenir négatif à $\bar{\varepsilon} = 1$ comme prévu.

Orientation ME ≃ (112) [1 7 $\bar{4}$].

Trois systèmes ($-a_2$; $-c_2$; $-d_3$) sont initialement à l'état critique, $\tau^l = \tau^l_c$ *(Tableau IV)*. Avec le critère de glissement $\tau^k \geq 0{,}9\ \tau^k_c$, le nombre de systèmes de glissement actifs oscille entre 3 et 5 au cours de la déformation théorique avec des amplitudes de glissement importantes sur les systèmes en commun ($-a_2$ et $-d_3$).

A $\bar{\varepsilon} = 1$, le calcul de minimisation de dT prévoit :

- *une rotation vers* ≃ *(314) [3 7* $\bar{4}$*] à* $\bar{\varepsilon} = 1$ *(Figure 65),*
- *un cisaillement* e^*_{12} *faible et négatif* (≃ - *0,09 à* $\bar{\varepsilon} = 1$)
  et un cisaillement e^*_{23} *très fort et positif* (≃ *0,9 à* $\bar{\varepsilon} = 1$).

Expérimentalement, on constate une rotation vers ∿ (314) [1 2 $\bar{1}$] *(Figure 65)* en accord raisonnable avec ces calculs. *La figure 66* montre également un bon accord entre les cisaillements mesurés et calculés. A une déformation $\bar{\varepsilon} = 0{,}56$, les plans de glissement détectés sont surtout a et d comme prévu *(Figure 67)*.

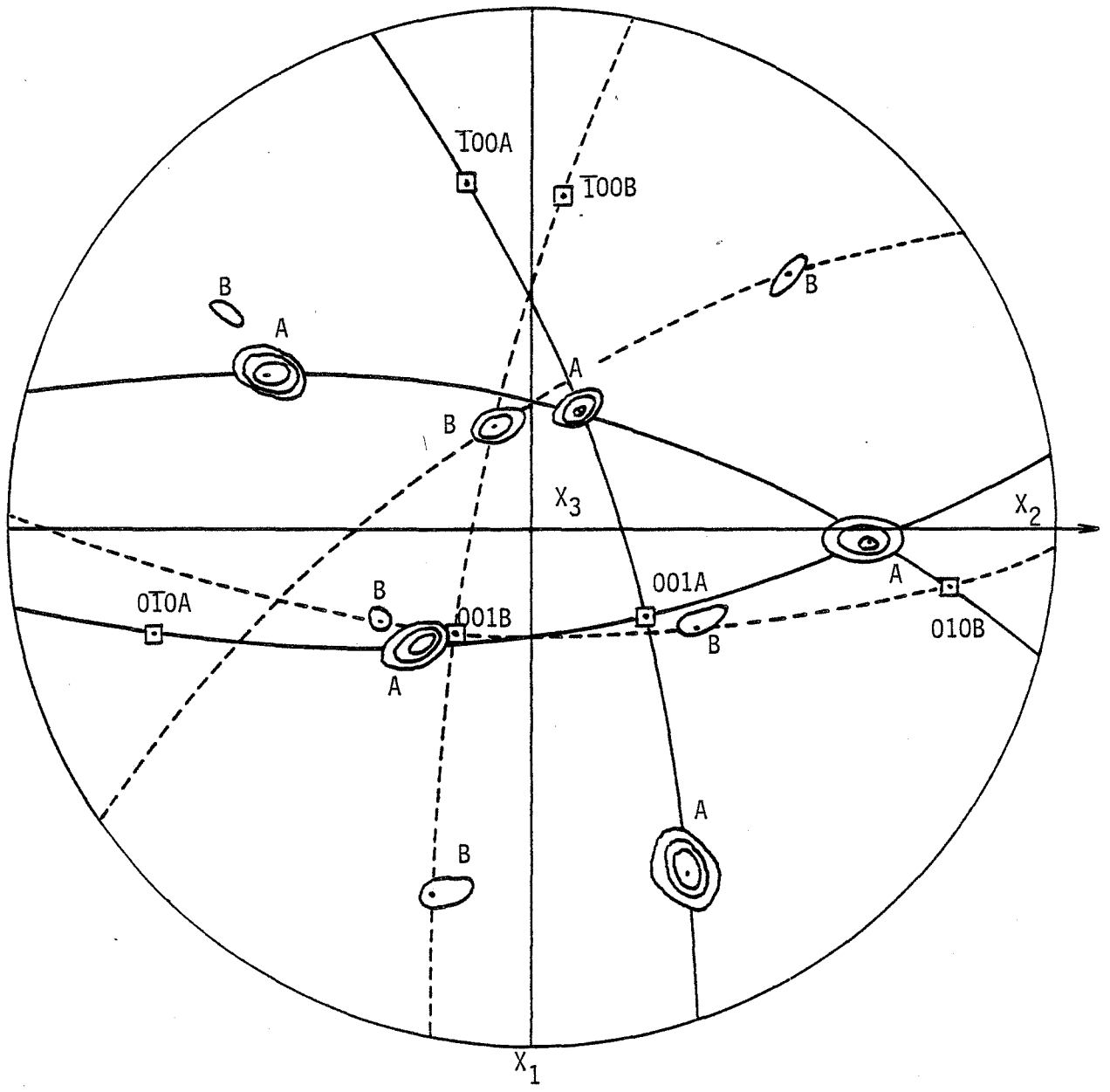


FIGURE 64 - Figures de pôles {220} à $\bar{\varepsilon} = 1$ du monocristal d'orientation initiale MD ∿ ($\bar{2}$ 3 16) [1 6 $\bar{1}$] déformé en compression plane orientation A ≃ ($\bar{1}\bar{1}$3) [183] - orientation B ≃ ($\bar{2}$14) [$\bar{1}$ 10 $\bar{3}$]

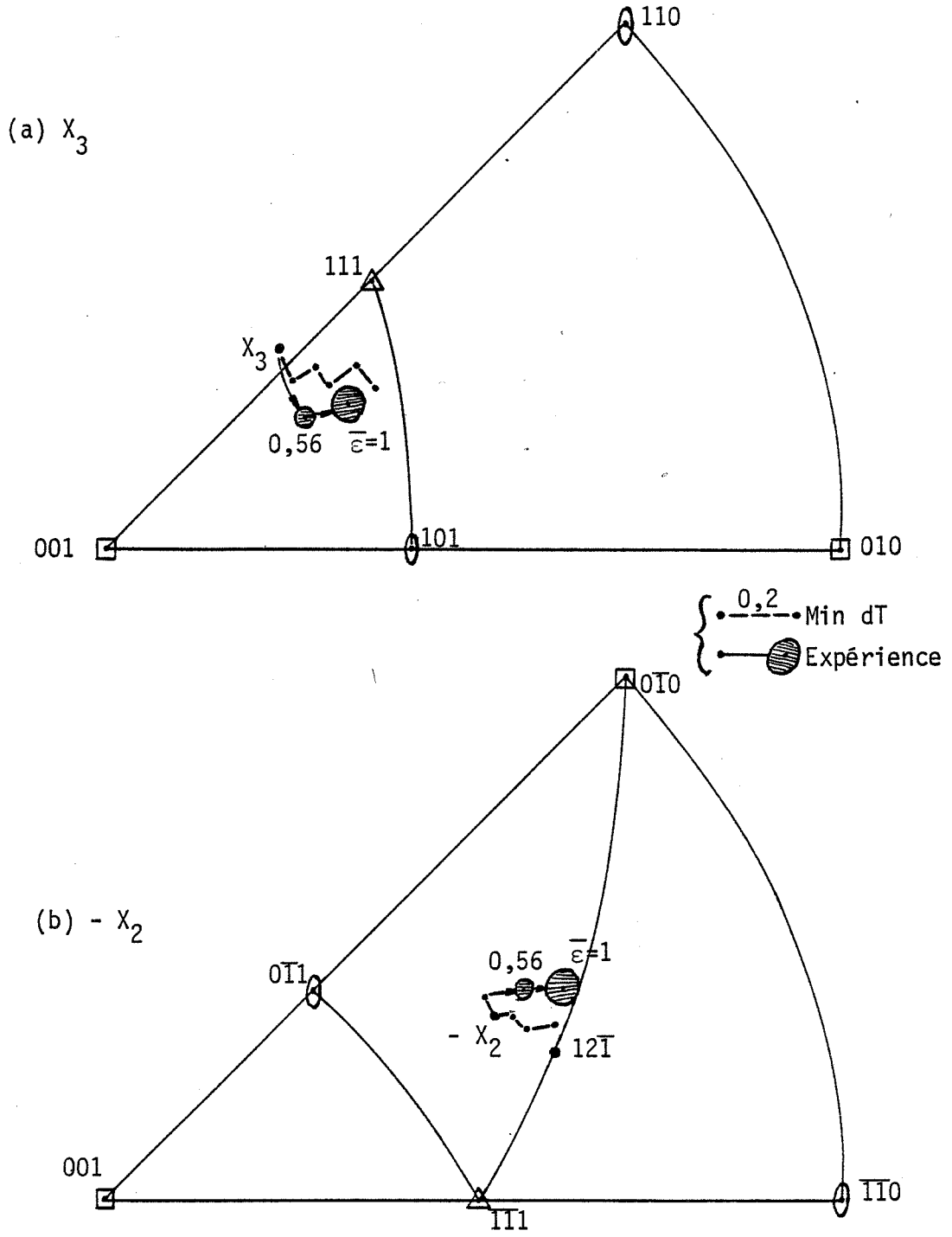


FIGURE 65 - Rotations théoriques et expérimentales de l'orientation initiale ME ≃ (112) [17$\bar{4}$], $\tau \geq 0{,}9\ \tau_c$

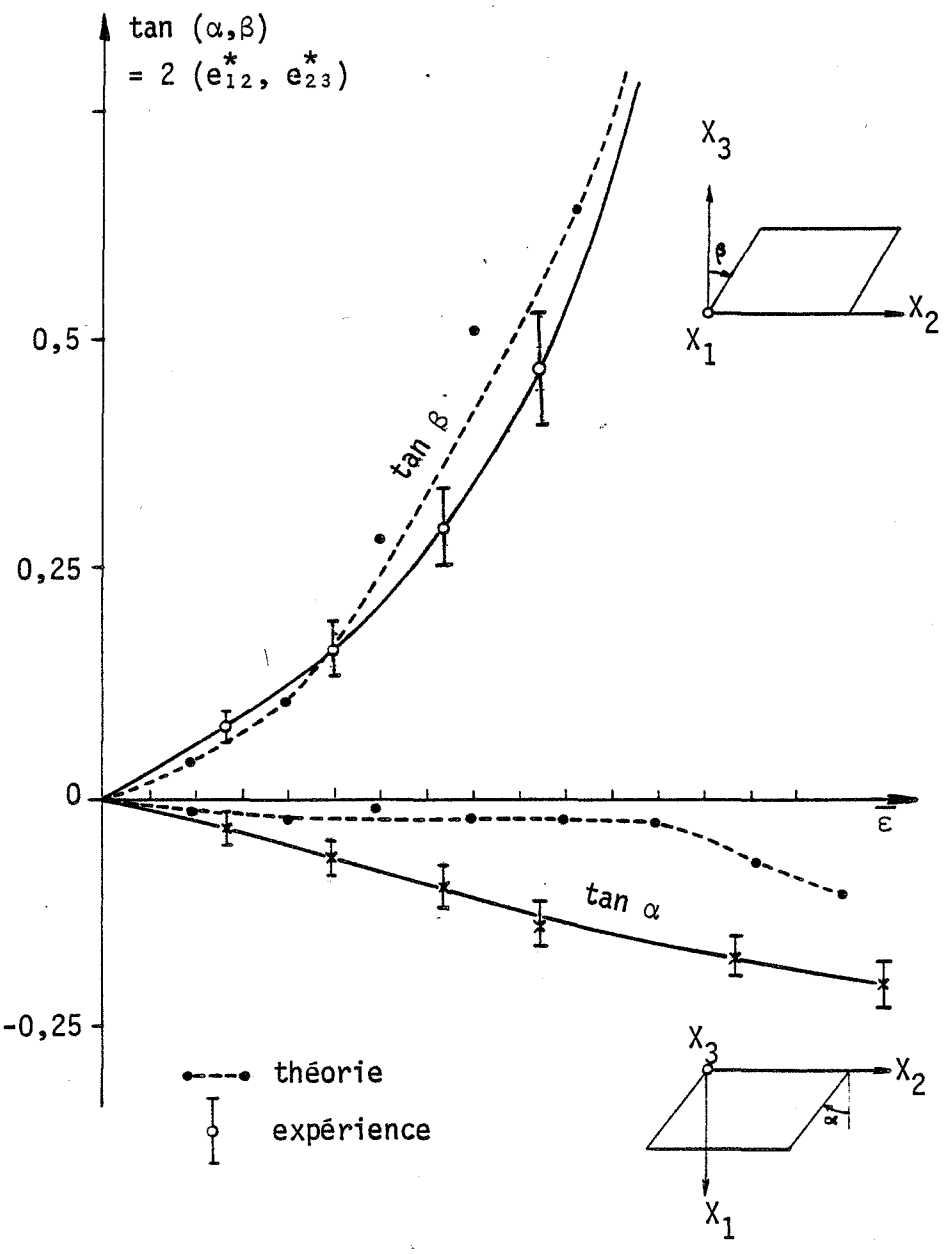
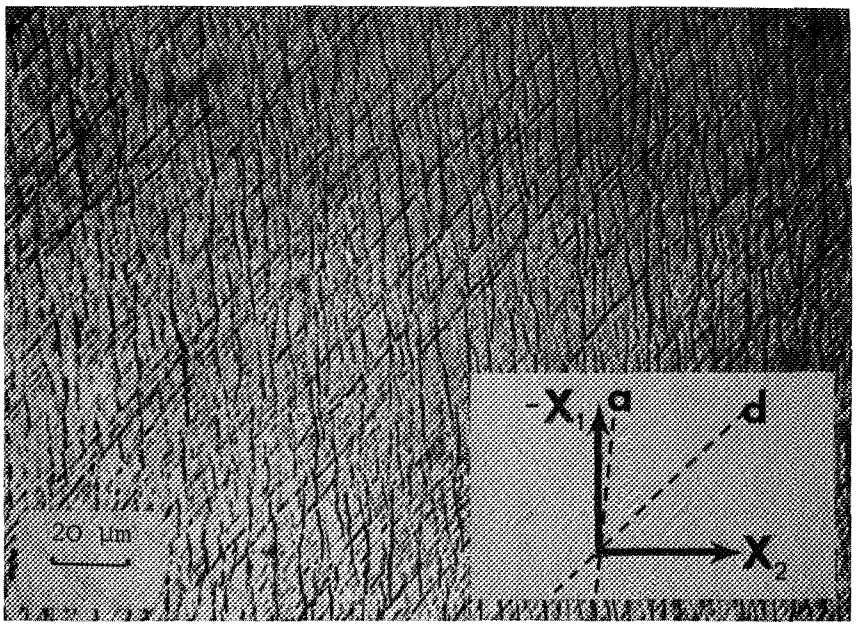
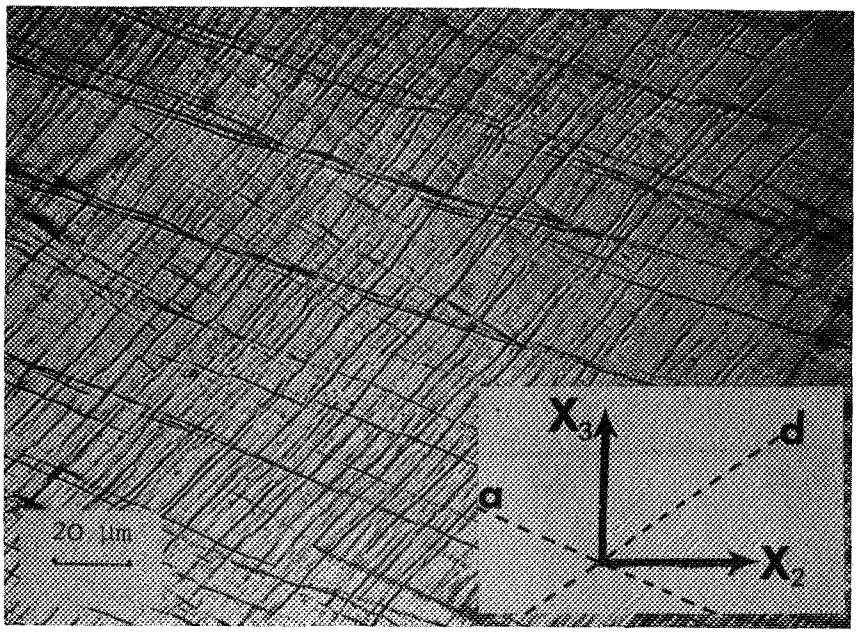


FIGURE 66 - Cisaillements e^*_{12} et e^*_{23} théoriques et expérimentaux de l'orientation initiale ME ≃ (112) [17$\bar{4}$]

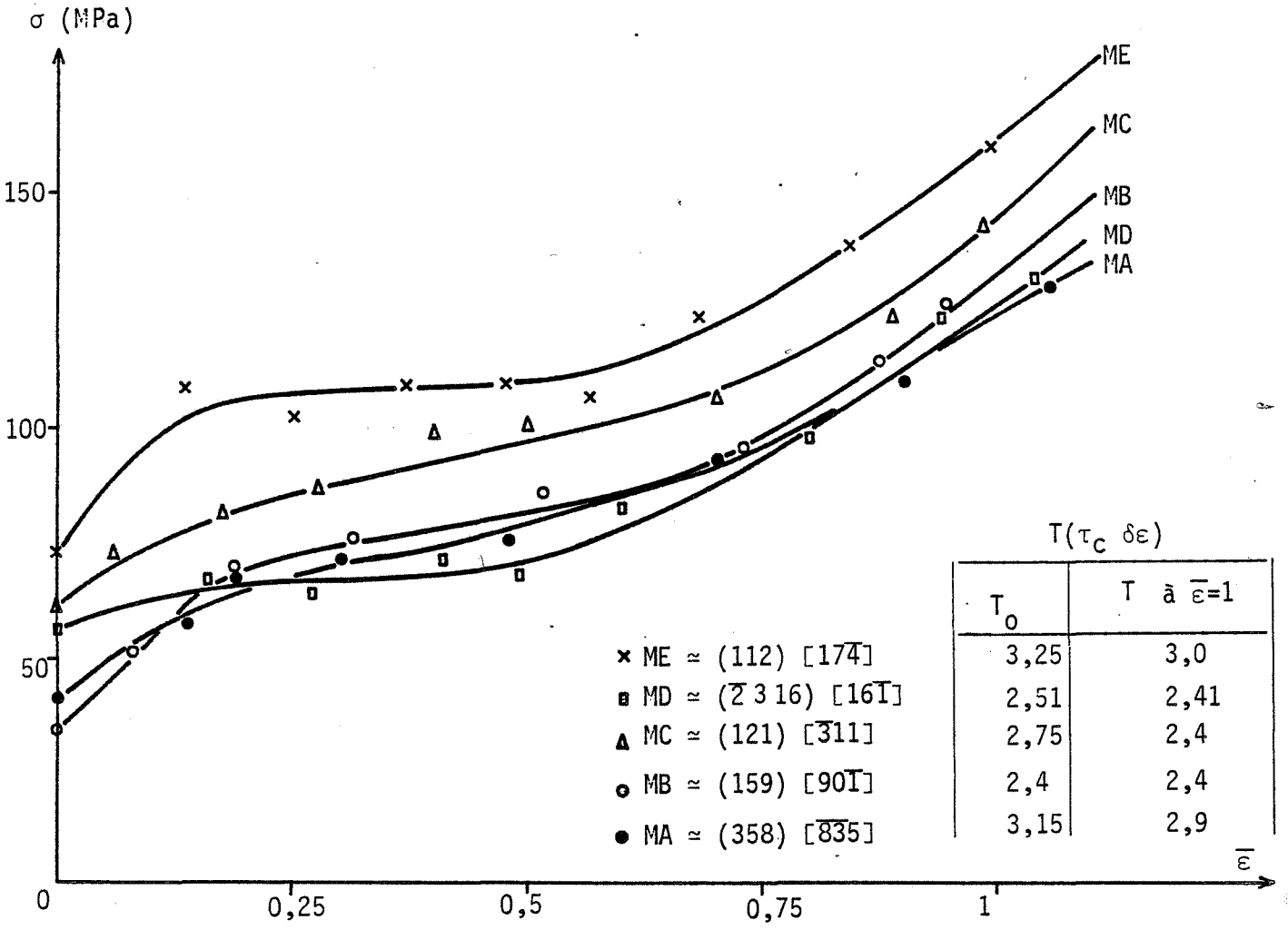


Face X_3



Face X_1

FIGURE 67 - Traces des plans de glissement observées à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}56$, orientation initiale ME $\simeq (112)\,[1\bar{7}4]$



$T(\tau_c\ \delta\varepsilon)$

T_o	T à $\bar{\varepsilon}$=1
3,25	3,0
2,51	2,41
2,75	2,4
2,4	2,4
3,15	2,9

FIGURE 68 - Courbes contrainte-déformation de monocristaux d'orientations de faible symétrie MA ; MB ; MC ; MD et ME

Remarques :

Les courbes contrainte-déformation des cristaux MA, MB, MC, MD et ME sont présentées à *la figure 68*. On constate que ces courbes se classent, en général, dans l'ordre croissant de l'énergie initiale To sauf pour l'orientation MA. Apparemment, cette dernière se comporte comme l'orientation {110} <112> vers laquelle, d'ailleurs, elle tourne.

III.1.4 - MONOCRISTAUX D'UN ACIER INOXYDABLE AUSTENITIQUE.

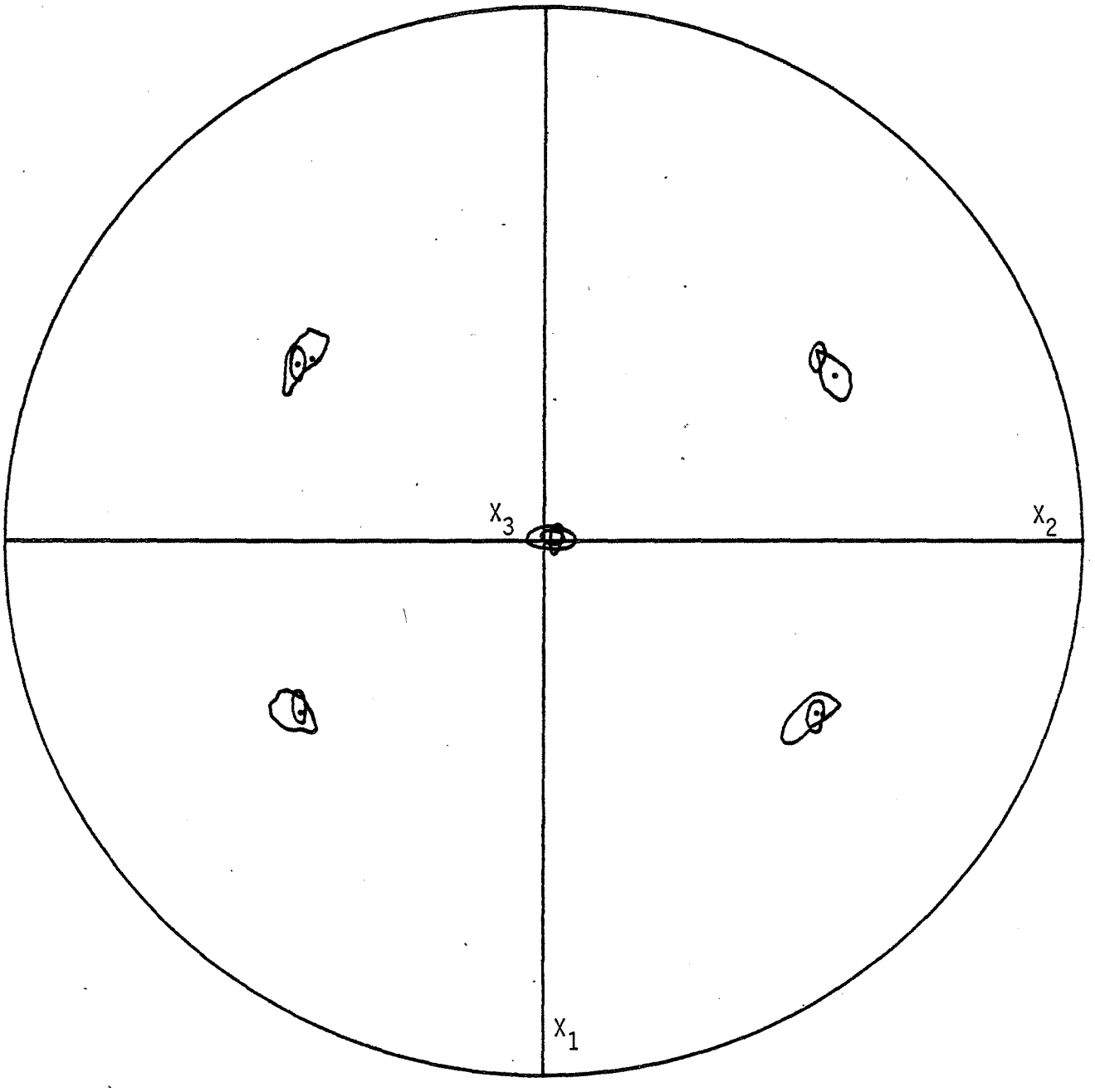
Nous avons testé deux orientations d'un acier inoxydable austénitique de composition : 17% Cr, 13% Ni, 0,03% C, l'une de haute symétrie ∿ (011) [$\bar{1}$ 0 0] et l'autre de faible symétrie ∿ (012) [4 $\bar{2}$ 1], en compression plane partiellement imposée avec le même dispositif que celui utilisé pour l'étude des cristaux d'aluminium.

Orientation ∿ (011) [$\bar{1}$ 0 0].

Le cas de cette orientation a été étudié en détail dans la première partie de ce chapitre (*c.f. III.1.2)*. Rappelons que théoriquement, la rotation cristalline est nulle ainsi que les deux cisaillements e^*_{12} et e^*_{23}. Expérimentalement, nous avons effectivement une rotation nulle *(Figure 69)* avec $e^*_{12} \simeq e^*_{23} = 0$ en bon accord avec les calculs.

Orientation ∿ (012) [4 $\bar{2}$ 1].

Le polyèdre critique de cette orientation, *figure 70*, présente un sommet d'énergie maximale très faible de l'ordre de 2,1 τ_c $\delta\varepsilon$. Notons qu'il est rare de trouver des énergies de déformation plastique aussi faibles. Trois systèmes sont initialement à l'état critique ($-a_1$; $-c_2$; $-d_1$), les autres systèmes sont sollicités à des contraintes inférieures à 0,9 τ_c. Ceci conduit,



$\bar{\varepsilon} = 0$

$\bar{\varepsilon} = 0{,}66$

FIGURE 69 - Figure de pôles {220} d'un acier inoxydable austénitique d'orientation initiale ≃ (011) [$\bar{1}$00] déformé en compression plane.

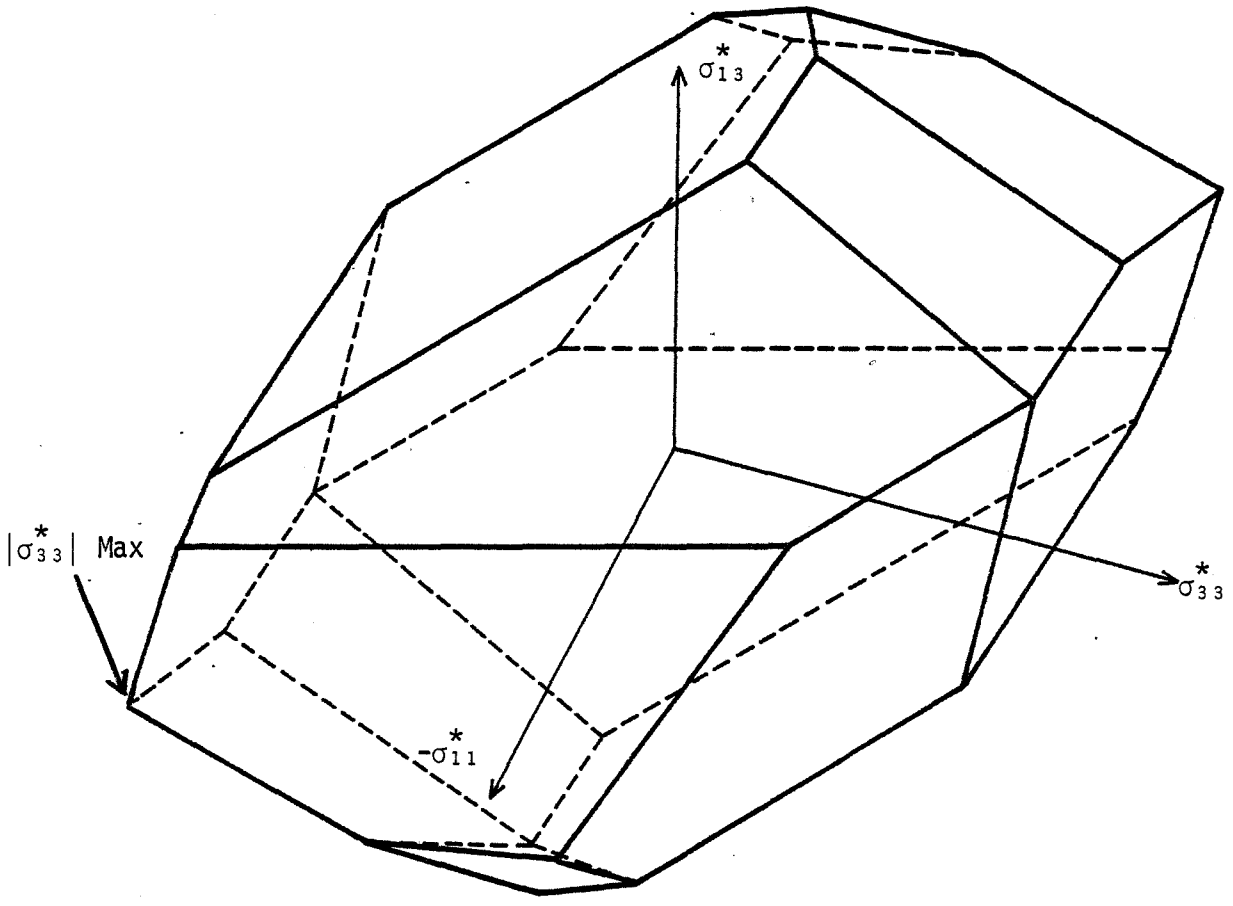


FIGURE 70 - Polyèdre critique d'un acier inoxydable austénitique d'orientation initiale ≃ (012) [4$\bar{2}$1]

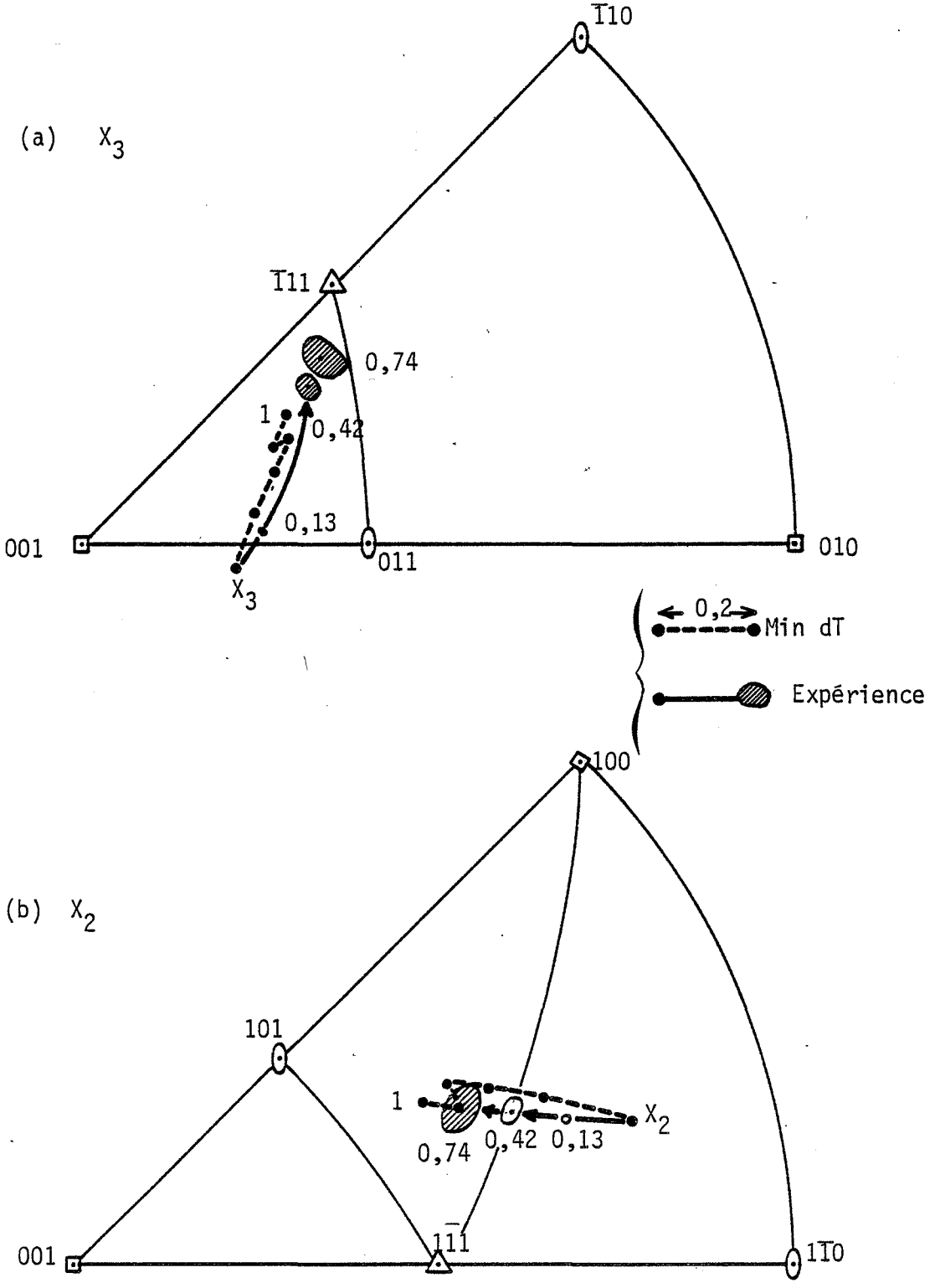


FIGURE 71 - Rotations théoriques et expérimentales d'un Monocristal d'acier inoxydable austénitique d'orientation initiale ≃ (021) [4$\bar{2}$1]

lors de la déformation théorique, à des combinaisons de 3 systèmes contenant toujours le système $-c_2$ dont l'amplitude de glissement est très importante ($\geq 2\ \delta\varepsilon$). L'opération de ces combinaisons de 3 systèmes entraine, à $\bar{\varepsilon} = 1$, une rotation importante vers $\sim (\bar{3}57)\ [3\ \bar{1}\ 2]$ d'énergie de déformation plastique de l'ordre de $3{,}1\ \tau_c\ \delta\varepsilon$, avec des cisaillements $e^*_{12} \simeq - 0{,}12$ et $e^*_{23} \simeq - 0{,}93$.

L'expérience montre un très bon accord avec les prévisions théoriques pour les cisaillements, les rotations et les glissements :

- *une rotation vers* $\sim (\bar{7}34)\ [8\ \bar{3}\ 6]$ *à* $\bar{\varepsilon} = 0{,}74$ *(Figure 71)*
- *le plan de glissement* c *à* $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}42$ *(Figure 72).*

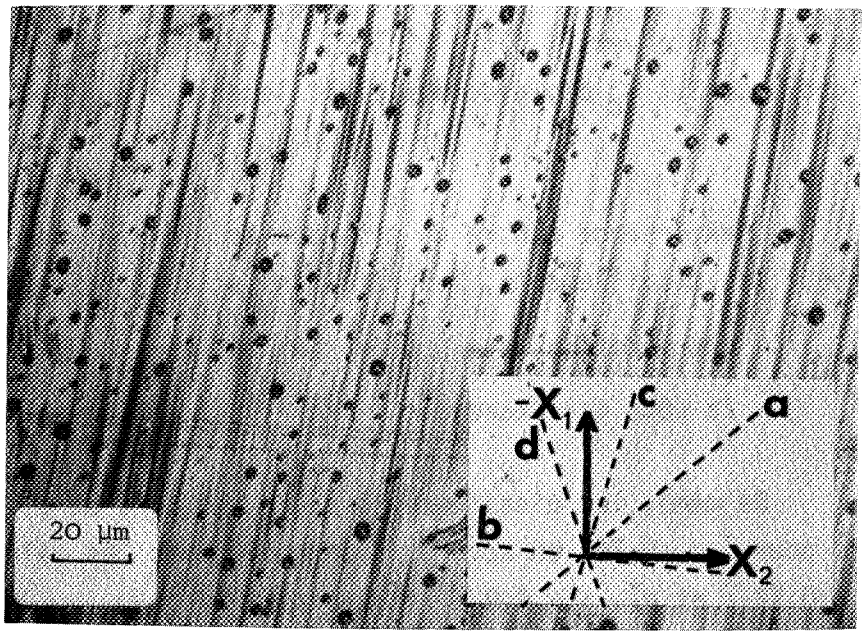
De même, les cisaillements $e^*_{12} \simeq - 0{,}16\ \bar{\varepsilon}$ et $e^*_{23} \simeq - 0{,}8\ \bar{\varepsilon}$ sont mesurés pour $\bar{\varepsilon} < 0{,}74$, en accord raisonnable avec les valeurs théoriques $e^*_{12} \simeq - 0{,}12\ \bar{\varepsilon}$ et $e^*_{23} \simeq - 0{,}9\ \bar{\varepsilon}$ *(Figure 73).*

La figure 74 représente les courbes contrainte - déformation ($\sigma(\bar{\varepsilon})$) de ces deux orientations d'acier inoxydable austénitique.

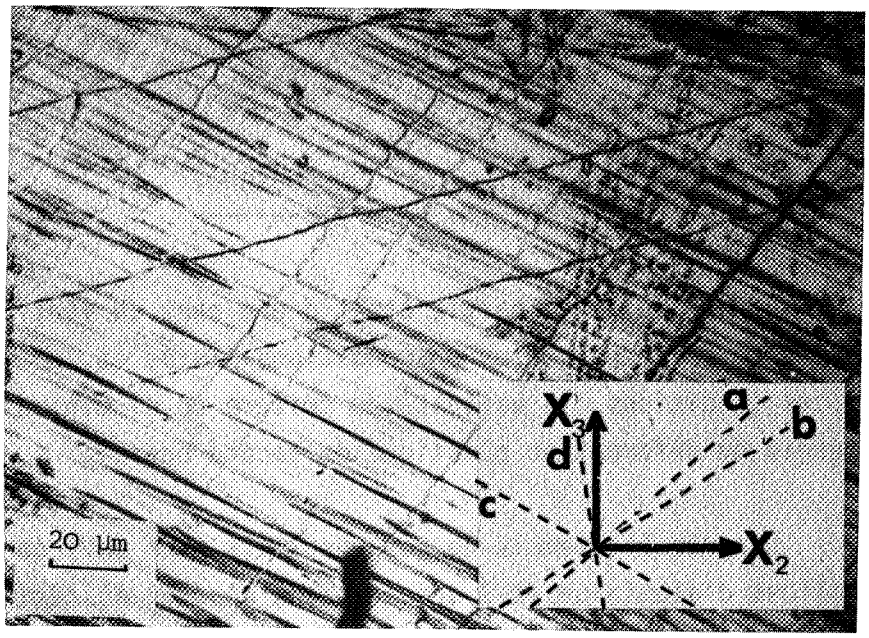
III.1.5 - DISCUSSION ET CONCLUSIONS.

Le but de cette partie était d'une part de vérifier la méthode de calcul de l'état des contraintes en conditions mixtes et, d'autre part de tester, pour ces conditions, la validité du critère de dT minimal (dT = variation de l'énergie de déformation plastique de second ordre).

D'après l'ensemble de nos résultats (sur environ 14 orientations cristallines d'aluminium et 2 orientations d'acier austénitique), il est clair que les calculs des états de contraintes, par la méthode du polyèdre critique avec le critère de travail des forces extérieures maximal [51], donnent des résultats très satisfaisants pour les systèmes à l'état critique. Même dans le cas le plus défavorable de l'orientation (001) [0 1 0] , où la déformation est



Face X_3



Face X_1

FIGURE 72 - Traces des plans de glissement observées à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}42$ sur un acier inoxydable austénitique d'orientation initiale $\simeq (012)\ [4\bar{2}1]$

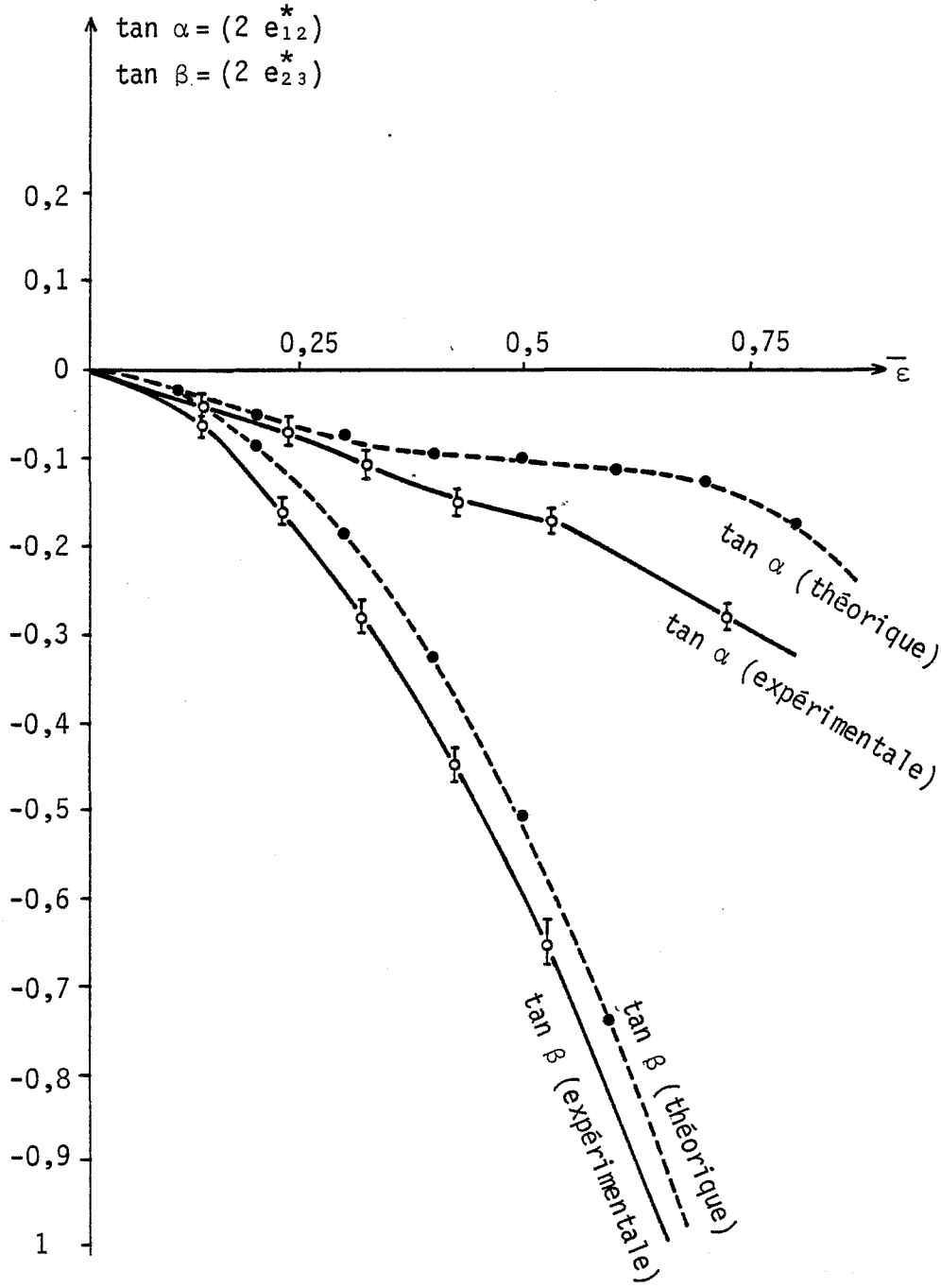


FIGURE 73 - Cisaillements e^*_{12} et e^*_{23}, théoriques et expérimentaux d'un acier inoxydable austénitique d'orientation initiale ≃ (012) [4$\bar{2}$1]

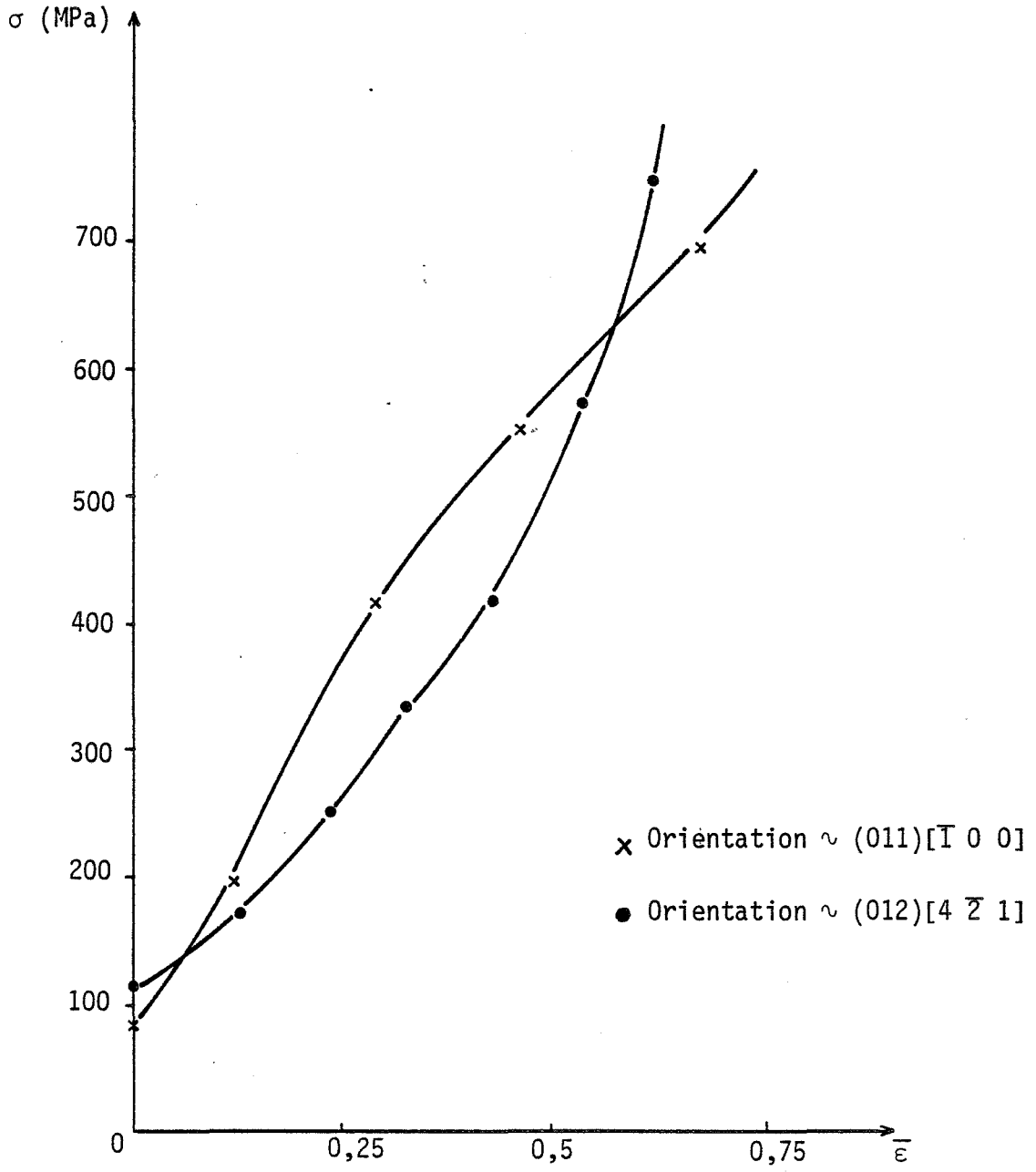


FIGURE 7 4 - Courbes contrainte-déformation de deux monocristaux d'un acier inoxydable austénitique.

inhomogène, les rotations cristallines vont dans le sens prévu par les systèmes de glissement critiques.

En ce qui concerne les valeurs relatives de σ^*_{33}, les courbes σ ($\bar{\varepsilon}$) des différentes orientations se classent, en général, dans l'ordre prévu (à l'exception de deux ou trois orientations). *La figure 75* présente les courbes $\tau_c = \frac{\sigma_{33}}{M} = f(\Sigma\delta\gamma^1 = M\,\bar{\varepsilon})$ qui devraient être confondues si la valeur de la cission critique est identique sur chaque système de glissement, quelque soit l'orientation. Les valeurs de M utilisées sont celles qui correspondent aux orientations expérimentales et tiennent donc compte des rotations au cours de la déformation. Ces courbes se regroupent d'une façon raisonnable avec une dispersion de l'ordre de ± 10% en contraintes. La comparaison des courbes τ_c ($\Sigma\delta\gamma^1$) avec celles présentées par HOSFORD [17] pour des déformations plus faibles *(Figure 7)* montre que ces dernières se regroupent autour de la limite inférieure de nos courbes. Notons également le comportement particulier des orientations relativement "molles" proches de {110} <112> et l'orientation relativement "dure" (110) [0 0 $\bar{1}$], de même valeur de M ($\sqrt{6}\,\tau_c\,\delta\varepsilon$), mais dont les courbes τ_c ($\Sigma\delta\gamma^1$) s'écartent légèrement de cette dispersion. Il est possible que cette différence soit due au nombre de systèmes actifs ; 2 pour l'orientation {110} <112> et 4 pour l'orientation (110) [0 0 $\bar{1}$].

En ce qui concerne les systèmes susceptibles de glisser, les systèmes dont la cission réduite est proche de τ_c peuvent poser des problèmes de calcul . Nous avons tenté de tenir compte de tous les systèmes proches de l'état critique en mettant le critère de sélection des systèmes susceptibles de glisser à $\tau^k \geq 0{,}9\,\tau^k_c$, par exemple. Ceci donne, pour certaines orientations, un meilleur accord entre prévisions et expérience, surtout pour les rotations.

Si on applique le critère de sélection des systèmes $\tau^l = \tau^l_c$, pour la plupart des orientations, le nombre de systèmes à l'état critique n'est que de 3. Il n'y a donc pas d'indétermination des amplitudes de glissement et par conséquent tous les paramètres e^*_{ij}, r_i etc, sont déterminés comme l'ont montré CANOVA, KOCKS et JONAS [33]. Par contre, avec le critère de sélection des systèmes $\tau^k \geq 0{,}9\,\tau^k_c$, le nombre de systèmes susceptibles de glisser est, en général, supérieur à 3. Pour ces cas où les $\delta\gamma^l$ sont alors indéterminés, la

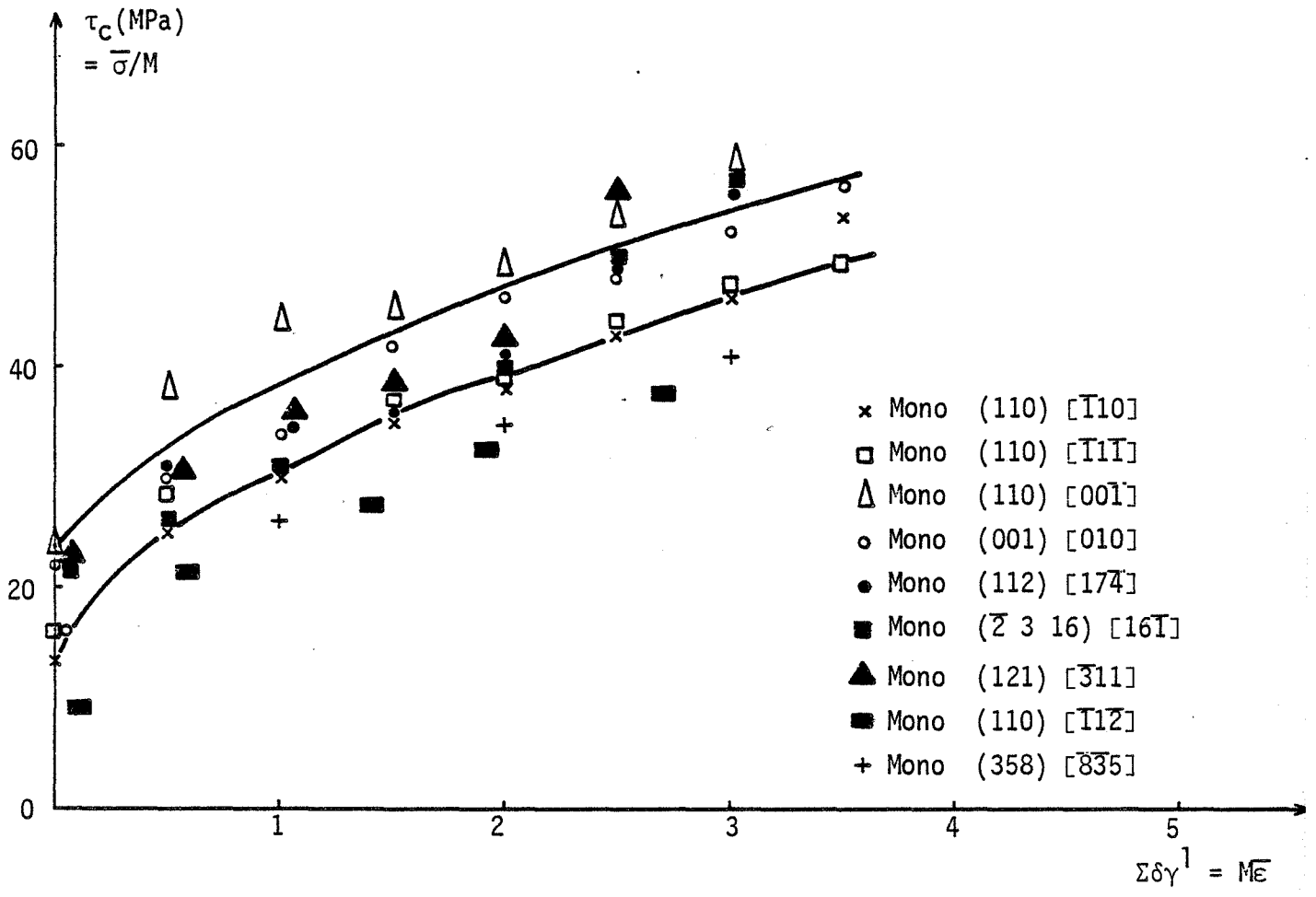


FIGURE 75 - Courbes cission résolue-cisaillement, $\tau_c = f(\Sigma\delta\gamma^1)$ pour monocristaux d'aluminium déformés en compression plane

minimisation de dT nous permet d'aboutir à de bons résultats pour les différents paramètres qui définissent la déformation. En particulier, pour les orientations de faible symétrie, les amplitudes et les sens des cisaillements et des rotations sont très proches des valeurs calculées.

Pour les orientations de haute symétrie de type (110) [u v w], nos calculs itératifs concordent bien avec les résultats expérimentaux sauf pour les orientations proches de (110) [$\bar{1}$ 1 0] pour lesquelles il faudra tenir compte du critère de continuité des glissements (actuellement négligé dans notre programme sur ordinateur).

Les résultats expérimentaux obtenus sur les orientations de haute symétrie de plan de compression (001) et de direction d'allongement proche de [0 1 0], ne peuvent être comparés aux prévisions théoriques de minimisation de dT en raison de l'inhomogénéité de la déformation. Cette inhomogénéité se traduit par la formation de bandes dans la direction d'allongement X_2. A ce jour, nous ne sommes pas encore en mesure de donner une interprétation "correcte" à ce phénomène.

Enfin, les essais préliminaires effectués sur les deux monocristaux d'acier inoxydable austénitique démontrent clairement la validité des calculs de déformation sous conditions mixtes pour ce type d'acier. Les critères énergétiques que nous avons utilisés semblent donc être valables pour des métaux c.f.c. de natures très différentes.

III.2 - COMPRESSION PLANE PARFAITEMENT IMPOSÉE.

Les essais de compression plane parfaitement imposée sont réalisés sur des cristaux d'aluminium selon la technique décrite au *chapitre II.2* c'est-à-dire en utilisant des tricristaux incompatibles dans le même dispositif qu'en *III.1* et en suivant le comportement du cristal central.

III.2.1 - CHOIX DES ORIENTATIONS.

Nous avons choisi des orientations variées qui présentent les caractéristiques suivantes :

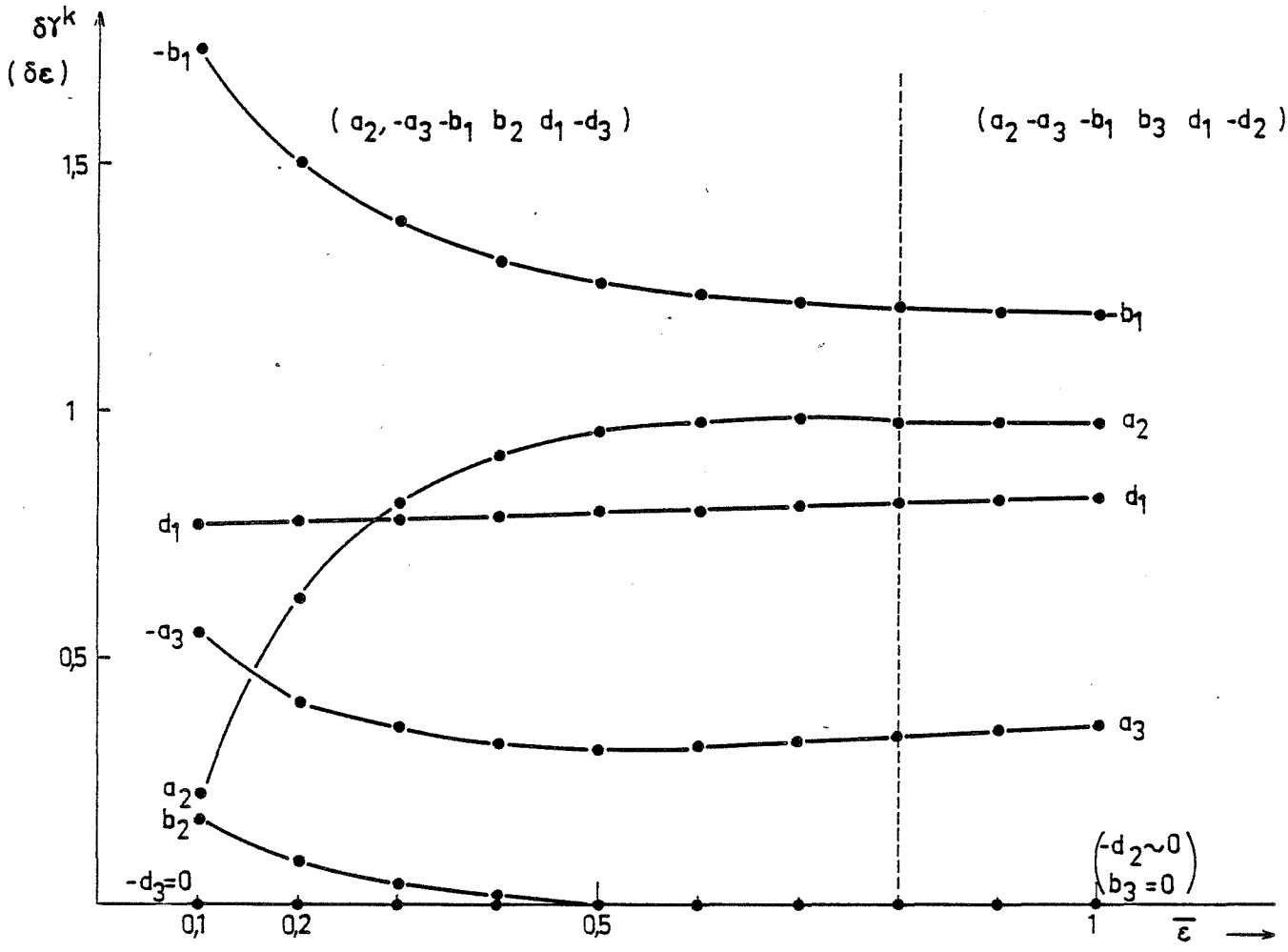


FIGURE 76 - Evolution des amplitudes théoriques de glissement $\delta\gamma^1$ en fonction de la déformation, orientation initiale TA ≃ (853) [$\overline{538}$], déformée en compression plane pure.

- *Orientations de faible ou de haute symétrie ;*
- *Six ou huit systèmes de glissement initialement à l'état critique ;*
- *Orientations stables ou instables.*

Nous avons testé huit orientations répertoriées TA, TB, TC, TD, TE, TF, TG et TH *(Tableau V)*. Parmi ces orientations, nous en avons trouvé trois (TA, TB et TC) qui sont stables ou qui varient peu et cinq autres instables. Nous présenterons les résultats selon le classement des orientations dans *le tableau V*.

III.2.2 - ORIENTATIONS "STABLES".

Orientation TA ≃ (853) [5 $\bar{3}$ $\bar{8}$].

Pour cette orientation, la théorie de BISHOP et HILL prévoit, pour une petite déformation, la possibilité de six systèmes de glissement (a_2 ; $-a_3$; $-b_1$; b_2 ; d_1 ; $-d_3$) *(Tableau V)*. La solution qui rend minimale dT prévoit que seuls cinq systèmes parmi eux sont actifs ($\delta\gamma\ (d_3) = 0$). *La figure 76* présente l'évolution théorique des amplitudes de glissement en fonction de la déformation appliquée, ces valeurs étant obtenues par les calculs itératifs décrits précédemment *(Chapitre II)*. On constate qu'au début de la déformation ($\bar{\varepsilon} < 0{,}3$), les amplitudes théoriques évoluent au fur et à mesure que l'orientation change, mais que cette évolution des $\delta\gamma^l$ est continue. Elle devient très faible pour $\bar{\varepsilon} \geq 0{,}5$ avec seulement 4 systèmes actifs ($\delta\gamma\ (b_2) = 0$) (la rotation théorique est de quelques degrés jusqu'à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}5$ et pratiquement nulle après cette déformation, *figure 77)*. De plus à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}8$, cette légère rotation conduit à un changement de la solution de BISHOP et HILL pour l'état de contrainte (on change le sommet du polyèdre critique des contraintes) mais ce changement des systèmes à l'état critique ne conduit pas, dans ce cas, à une discontinuité sur les amplitudes de glissement. Les quatres systèmes qui demeurent actifs restent les mêmes dans les deux solutions. Ces résultats théoriques justifient, à postériori, l'hypothèse de continuité des glissements qui nous a permis de négliger le terme de $d(\delta\gamma^l)$ dans l'expression (13) pour dT *(Chapitre I)*. Nous verrons par la suite que cette condition de continuité des glissements est toujours respectée pour une déformation parfaitement imposée, à la différence d'une déformation

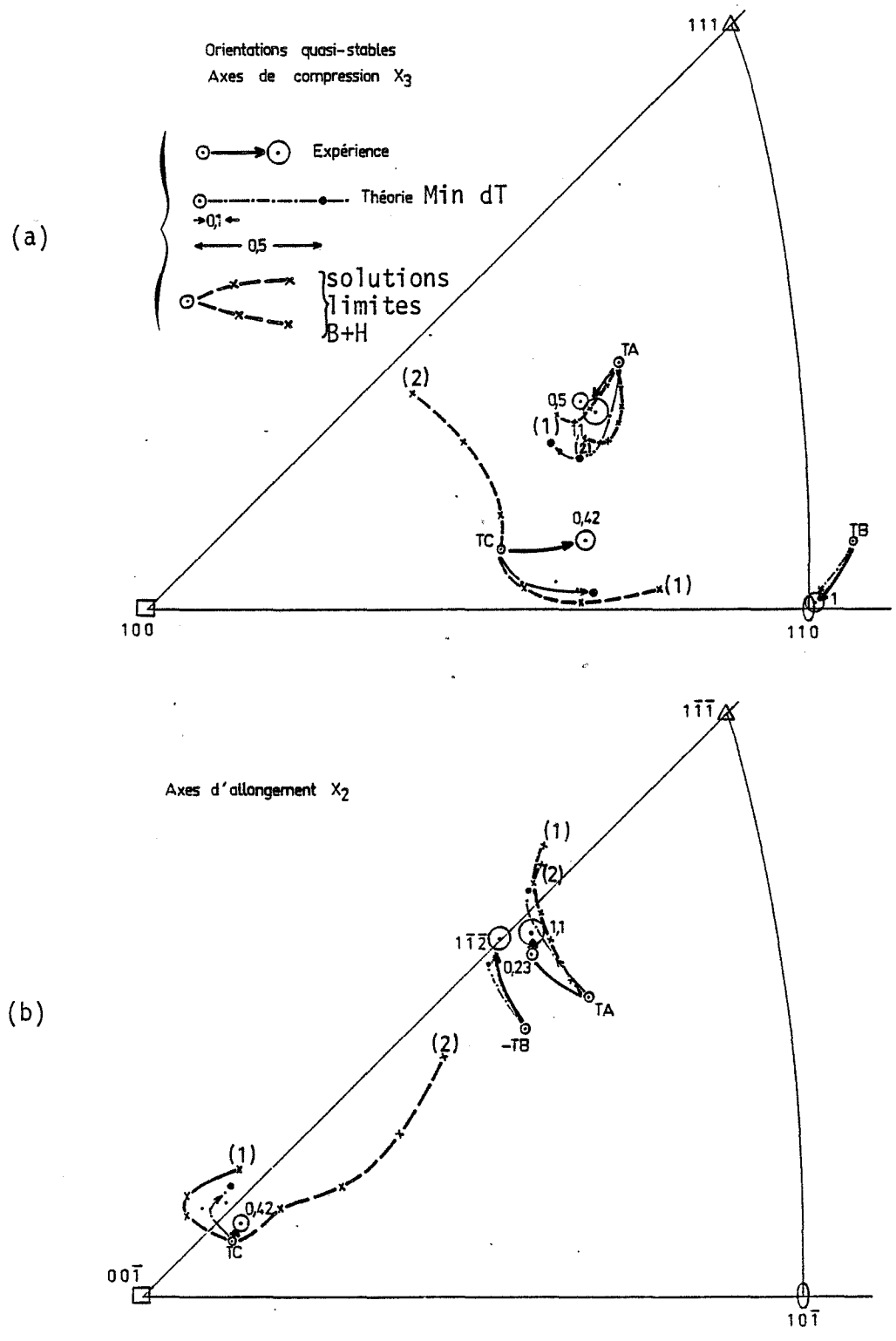


FIGURE 77 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_3 et X_2 des orientations quasi stables TA, TB et TC déformées en compression plane pure

Tableau V : Orientations des cristaux TA, TB, TC, TD, TE, TF, TG et TH. Energies intiales et systèmes initialement à l'état critique.

Repère	ORIENTATION	SOLUTION BISHOP	To (τ_c $\delta\varepsilon$)	SYSTEMES INITIALEMENT A L'ETAT CRITIQUE
TA	(88 53 29) [45 $\overline{30}$ $\overline{82}$] $\simeq$ (8 5 3) [5 $\overline{3}$ $\overline{8}$]	- 17	3,456	a_2 ; $-a_3$; $-b_1$; b_2 ; d_1 ; $-d_3$
TB	(74 67 $\overline{07}$) [$\overline{44}$ 31 84] $\simeq$ (10 10 1) [$\overline{4}$ 3 8]	- 6	3,097	$-a_1$; a_2 ; $-b_1$; b_2 ; c_1 ; $-c_2$; d_1 ; $-d_2$
TC	(90 42 07) [11 $\overline{07}$ $\overline{99}$] $\simeq$ (2 1 0) [0 0 $\overline{1}$]	- 7	2,607	a_2 ; $-a_3$; $-b_1$; b_2 ; $-c_1$; c_2 ; d_2 ; $-d_3$
TD	(42 45 82) [19 81 $\overline{52}$] $\simeq$ (1 1 2) [1 5 $\overline{3}$]	- 4	3,810	$-a_2$; a_3 ; b_2 ; $-b_3$; $-c_2$; c_3 ; d_2 ; $-d_3$
TE	(53 80 28) [80 $\overline{34}$ $\overline{50}$] $\simeq$ (5 8 3) [8 $\overline{3}$ $\overline{5}$]	20	3,432	$-b_1$; b_3 ; $-c_2$; c_3 ; d_1 ; $-d_2$
TF	(71 71 09) [61 $\overline{55}$ $\overline{57}$] $\simeq$ (10 10 1) [1 $\overline{1}$ $\overline{1}$]	- 6	4,074	$-a_1$; a_2 ; $-b_1$; b_2 ; c_1 ; $-c_2$; d_1 ; $-d_2$
TG	(80 57 25) [$\overline{47}$ 30 82] $\simeq$ (8 5 2) [$\overline{4}$ 3 9]	- 17	3,304	a_2 ; $-a_3$; $-b_1$; b_2 ; d_1 ; $-d_3$
TH	(65 68 36) [36 $\overline{65}$ 57] $\simeq$ (2 2 1) [1 $\overline{2}$ 2]	- 6	3,460	$-a_1$; a_2 ; $-b_1$; b_2 ; c_1 ; $-c_2$; d_1 ; $-d_2$

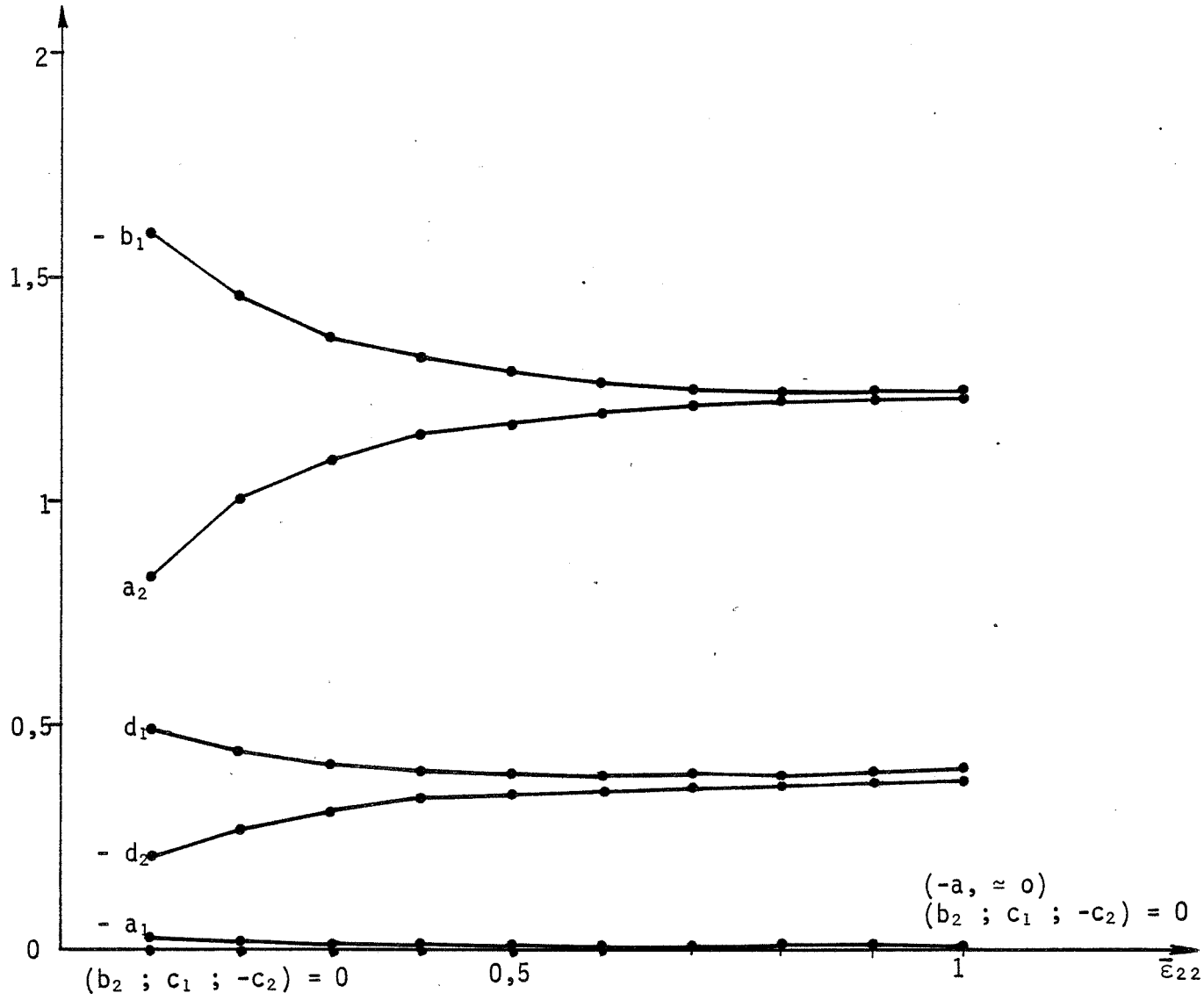


FIGURE 78 - Evolution des amplitudes théoriques de glissement en fonction de la déformation, orientation initiale TB ≃ (10 10 $\bar{1}$) [$\bar{4}$38]

en conditions mixtes *(c.f. III.1)*.

On notera également sur *la figure 76* que le nombre de systèmes dont l'amplitude $\delta\gamma^1$ reste significative est de quatre ($-b_1$; a_2 ; d_1 ; a_3), bien que six systèmes soient à l'état critique.

Théoriquement les plans a(111), b($\bar{1}\bar{1}1$) et c($1\bar{1}1$) devraient glisser. Par microscopie optique nous avons bien confirmé le glissement sur (111) et ($\bar{1}\bar{1}1$), mais le glissement sur ($1\bar{1}1$) dont l'amplitude est plus faible que les autres, était plus difficile à déceler.

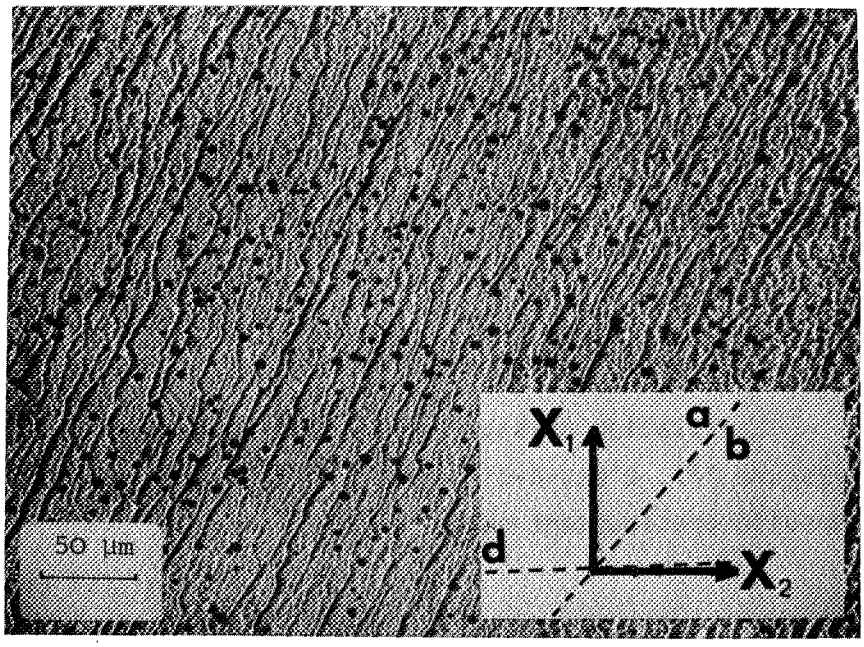
La rotation cristalline est en bon accord avec les prévisions théoriques *(Figure 77)*, c'est-à-dire quelques degrés vers (852) [1 $\bar{1}$ $\bar{2}$] à $\bar{\varepsilon}$ = 0,23 et ensuite pratiquement nulle jusqu'à $\bar{\varepsilon}$ = 1,14.

Orientation TB ≃ (10 10 $\bar{1}$) [$\bar{4}$ 3 8].

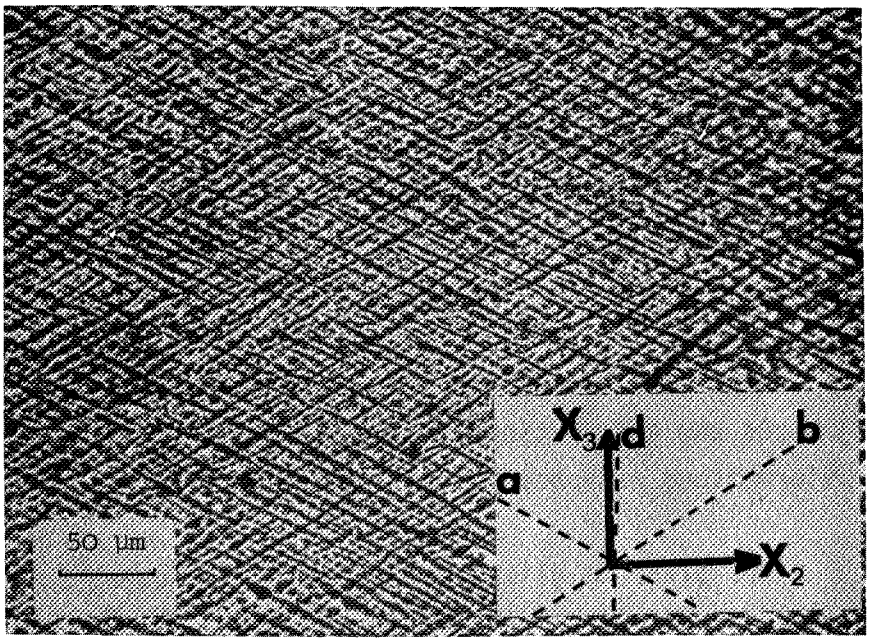
Cette orientation est à 6° de l'orientation de haute symétrie (110) [$\bar{1}$ 1 2]. D'après DILLAMORE et al [6], l'orientation exacte (110) [$\bar{1}$ 1 2] est un des cas où la théorie de BISHOP et HILL donne une solution sans indétermination : 4 systèmes de glissement et une rotation nulle. Pour l'orientation testée, la théorie qui minimise dT prévoit une rotation initiale vers (110) [$\bar{1}$ 1 2] à $\bar{\varepsilon}$ ≃ 0,3. Par itération, on constate que les quatre mêmes systèmes (a_2 ; $-b_1$; d_1 et d_2) restent à l'état critique, avec glissement essentiellement sur les plans a et b dont les amplitudes de glissement sont importantes *(Figure 78)*.

Expérimentalement on constate que l'orientation tourne vers (110) [$\bar{1}$ 1 2] après une déformation ≃ 0,3 *(Figure 77)* et reste stable ensuite jusqu'à des déformations rationnelles de l'ordre de 1.

Les plans de glissement observés facilement sur les faces des échantillons testés sont effectivement a et b *(Figure 79)*. Le glissement relativement faible sur le plan d($1\bar{1}1$) (ce plan étant alors pratiquement parallèle au plan transverse (X_2, X_3)) pourrait être, par effet de glissement dévié, la cause des petits segments de glissement ondulé sur les traces de a et b.



Face - X_3



Face X_1

FIGURE 79 - Traces des plans de glissement observées à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}25$, orientation initiale TB ≃ (10 10 1) [438]

Orientation Tc ≃ (210) [0 0 $\bar{1}$].

Huit systèmes de glissement sont possibles pour l'orientation initiale *(Tableau V)*, et l'énergie de déformation plastique est relativement faible, 2,6 τ_c $\delta\varepsilon$ environ. La minimisation de dT conduit à une solution à cinq systèmes ($-c_1$; d_2 et $-d_3$ sont éliminés) dont seuls les systèmes a_2, $-b_1$ et b_2 ont une amplitude importante (> 0,5 $\delta\varepsilon$) *(Figure 80)*. Par le calcul itératif, on constate une légère évolution de l'orientation théorique vers ≃ (530) [1 $\bar{1}$ $\bar{1}$0] à $\bar{\varepsilon}$ = 0,5 *(Figure 77)*. *La figure 77* montre, à la différence des deux orientations précédentes, une indétermination très importante de la rotation. L'une des deux solutions limites (1) coïncide avec celle prévue par la minimisation de dT, l'autre solution (2) tend vers l'orientation (411) [1 $\bar{1}$ $\bar{3}$], dont l'énergie de déformation ($\sim$ 3,15 τ_c $\delta\varepsilon$) est nettement plus importante.

La rotation expérimentale est proche de celle prévue par le minimum de dT *(Figure 77)*. L'axe d'allongement ne varie pratiquement pas et le plan de compression tourne légèrement vers ≃ (10 6 1).

Il est intéressant de constater qu'au cours de la rotation théorique correspondant au minimum de dT, la solution de BISHOP et HILL pour l'état de contrainte change plusieurs fois. Cependant, pour $\bar{\varepsilon} \geq 0{,}3$, le calcul de minimisation de dT conduit, pour chaque incrément de déformation $\delta\varepsilon$, à des amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ relativement importantes pour les systèmes a_2 ; $-b_1$ et b_2. Dans ce cas, le fait de changer plusieurs fois de solution de BISHOP n'a pratiquement pas d'influence sur la rotation théorique finale puisque, pour chaque incrément de déformation $\delta\varepsilon$, la rotation qui minimise dT est faible.

La figure 81 montre les traces des plans de glissement a(111) et b($\bar{1}\bar{1}$1) sur le cristal après une déformation $\bar{\varepsilon}$ ≃ 0,56. Bien que les quatre plans {111} soient à l'état critique la théorie prévoit des amplitudes de glissement importantes que sur les plans a et b en bon accord avec l'expérience. Notons que la théorie de TAYLOR, BISHOP et HILL a été critiquée dans le passé car expérimentalement tous les systèmes de glissement prévus n'étaient pas observés ; la prise en compte des énergies du deuxième ordre explique, en partie, ce désaccord.

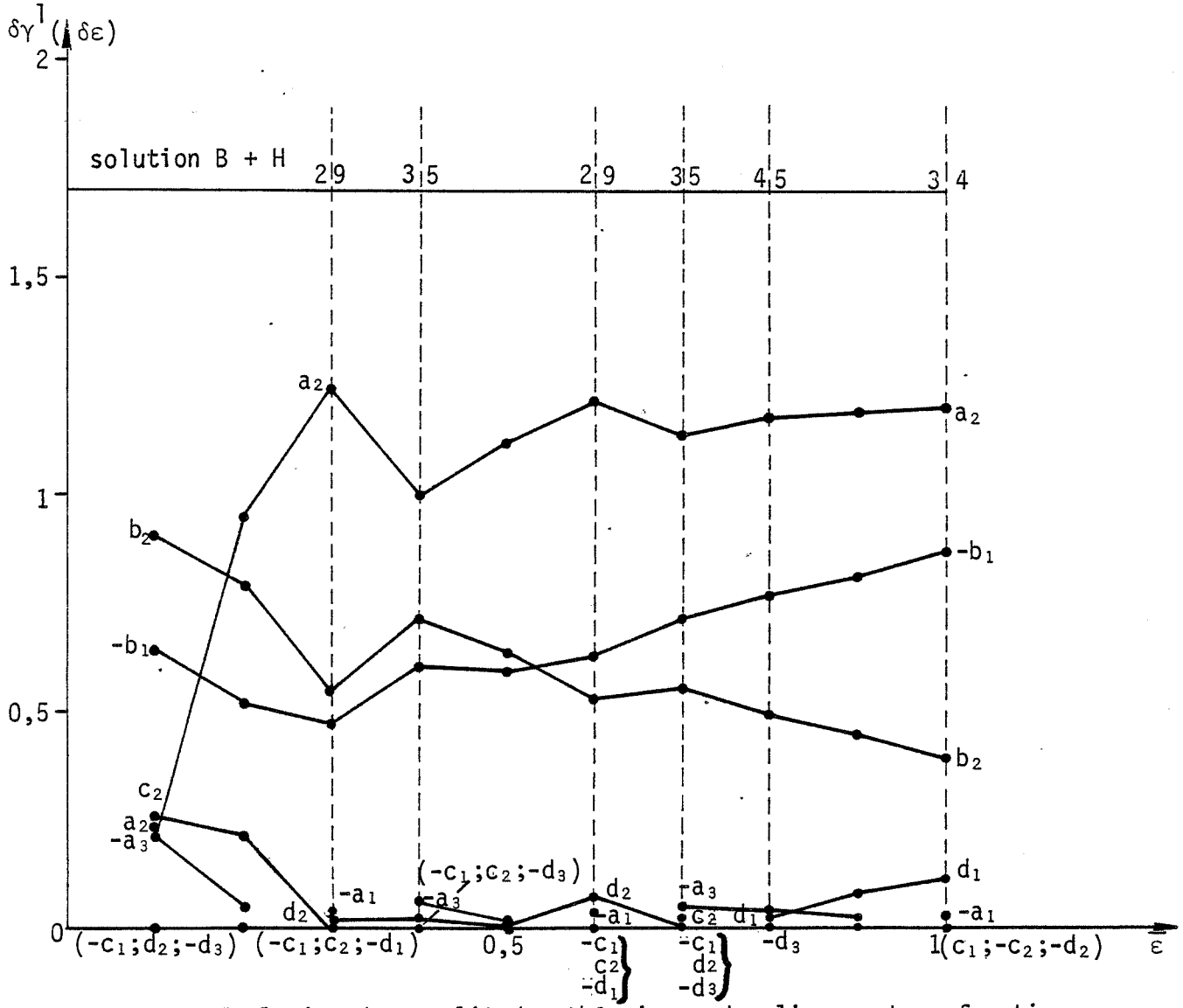
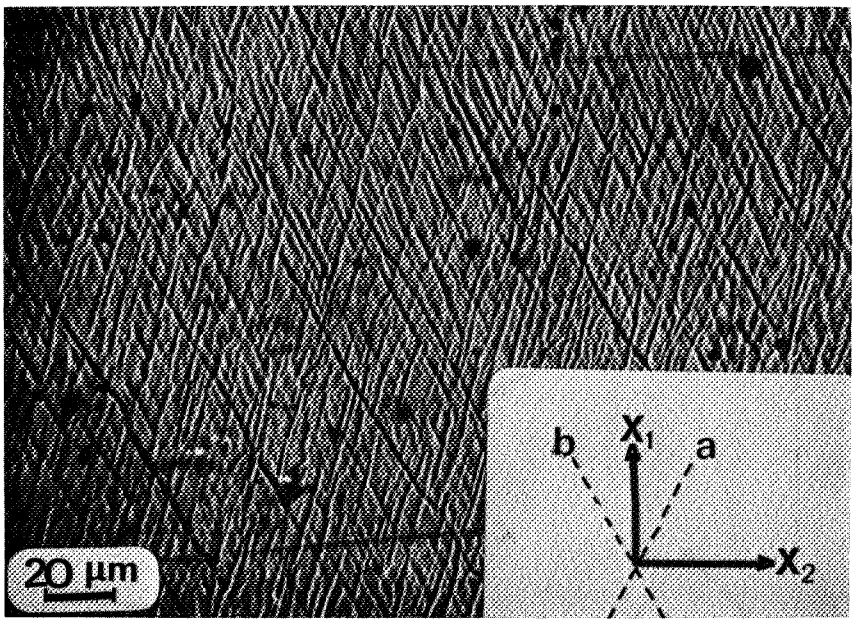
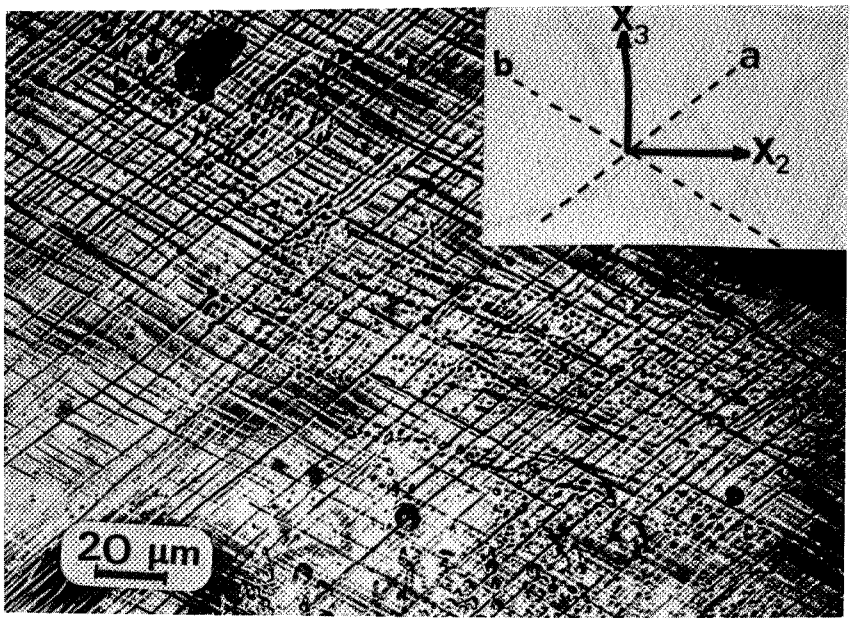


FIGURE 80 - Evolution des amplitudes théoriques de glissement en fonction de la déformation de l'orientation initiale TC ≃ (210) [00$\bar{1}$]



Face - X_3



Face X_1

FIGURE 81 - Traces des plans de glissement observées à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}56$, orientation initiale TC $\simeq$ (210) [00$\bar{1}$]

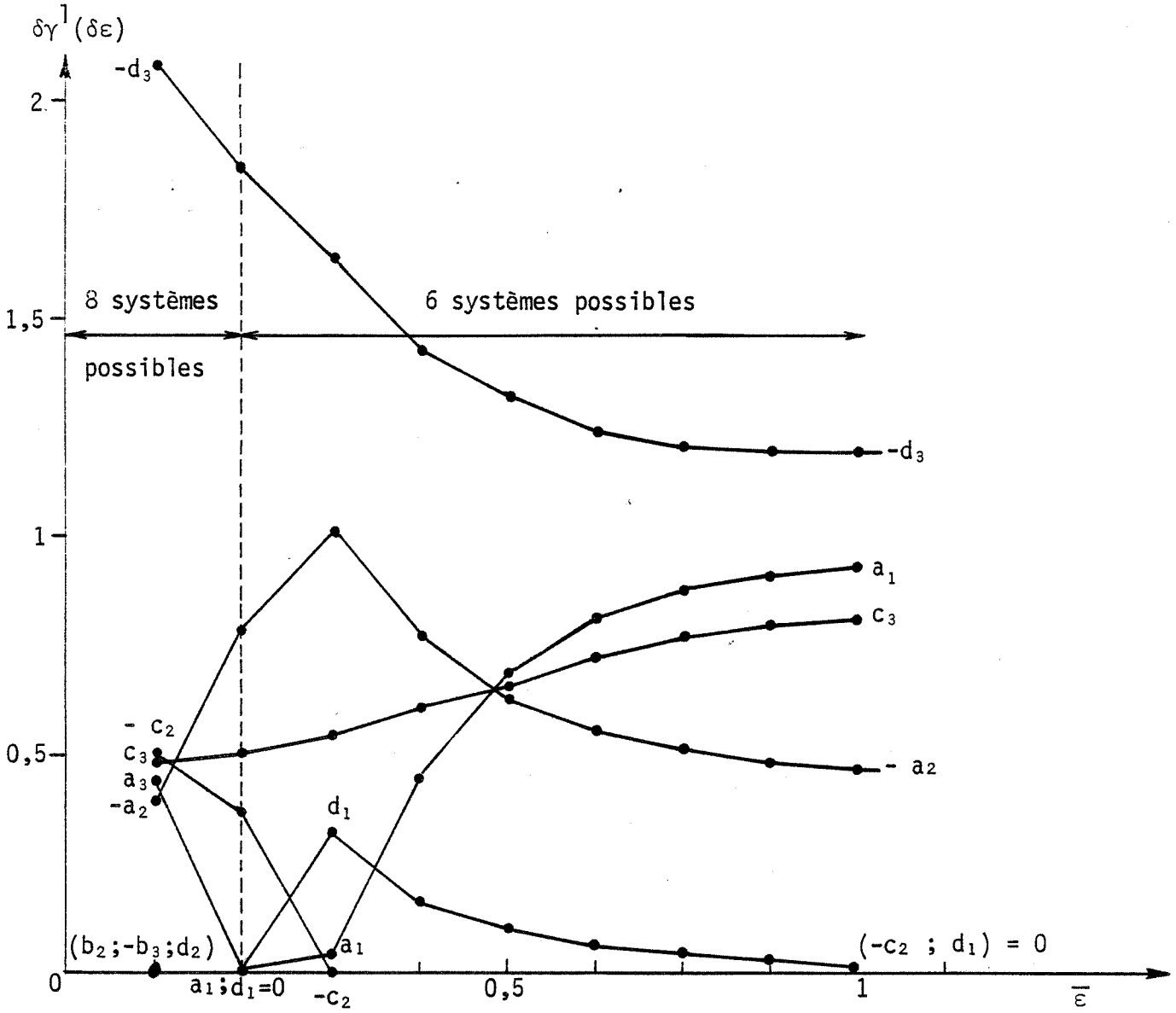


FIGURE 82 - Evolution des amplitudes théoriques de glissement $\delta\gamma^1$ en fonction de la déformation, orientation initiale TD ≃ (112) [15$\bar{3}$]

III.2.3 - ORIENTATIONS INSTABLES.

Orientation TD ≃ (112) [1 5 $\bar{3}$].

Huit systèmes de glissement sont initialement à l'état critique *(Tableau V)* avec une énergie de déformation plastique relativement élevée, 3,8 τ_c $\delta\varepsilon$ environ. La solution qui minimise dT ne comporte que cinq de ces systèmes ($-a_2$; a_3 ; $-c_2$; c_3 et $-d_3$) dont le système $-d_3$ pour lequel l'amplitude de glissement est très importante (> 2 $\delta\varepsilon$). *La figure 82* présente les amplitudes théoriques des glissements en fonction de la déformation appliquée. On notera sur cette figure que pour $\bar{\varepsilon} \geq 0{,}3$ le nombre de systèmes dont l'amplitude de glissement $\delta\gamma^1$ reste significative est de 4 ($-d_3$; a_1 ; c_3 et $-a_2$) bien que 6 systèmes soient à l'état critique. Les traces des glissements observées par microscopie optique ont déjà été présentées, à titre d'exemple, dans *le chapitre II (Figure 24)*. Nous avons bien confirmé le glissement sur les plans a et d. Le glissement observé sur c_3 ($\bar{1}11$) [$\bar{1}$ $\bar{1}$ 0] est en fait très faible, essentiellement parce que les marches de glissement du système c_3 sur les faces X_3 et X_1 sont faibles.

Par le calcul itératif, on constate une évolution de l'orientation théorique vers (214) [5 7 $\bar{4}$] à $\bar{\varepsilon}$ = 1 *(Figure 83)*. La rotation expérimentale est en très bon accord avec la rotation théorique correspondant au minimum de dT (et proche de la solution limite (1)). Par contre, la trajectoire (2) qui correspond à l'autre solution "extrême" de BISHOP, s'éloigne du résultat expérimental de 6° environ, différence légèrement supérieure à l'erreur expérimentale.

Orientation TE ≃ (583) [8 $\bar{3}$ $\bar{5}$].

Initialement, six systèmes sont à l'état critique *(Tableau V)*. La courbe donnant dT en fonction de l'amplitude de glissement sur le système c_3 a été présentée pour cette orientation à *la figure 28 du chapitre II*. Les calculs théoriques, effectués en minimisant dT, prédisent les amplitudes de glissement ; elles sont données en fonction de la déformation sur *la figure 84*. Initialement ces amplitudes varient fortement à cause d'une importante rotation ; et de plus, dans ce cas il y a changement de la solution de BISHOP et HILL à $\bar{\varepsilon}$ = 0,3 avec continuité des amplitudes de glissement principaux. De même, la rotation décroit rapidement à partir de $\bar{\varepsilon}$ = 0,4 pour devenir pratiquement nulle à $\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}8$. *La*

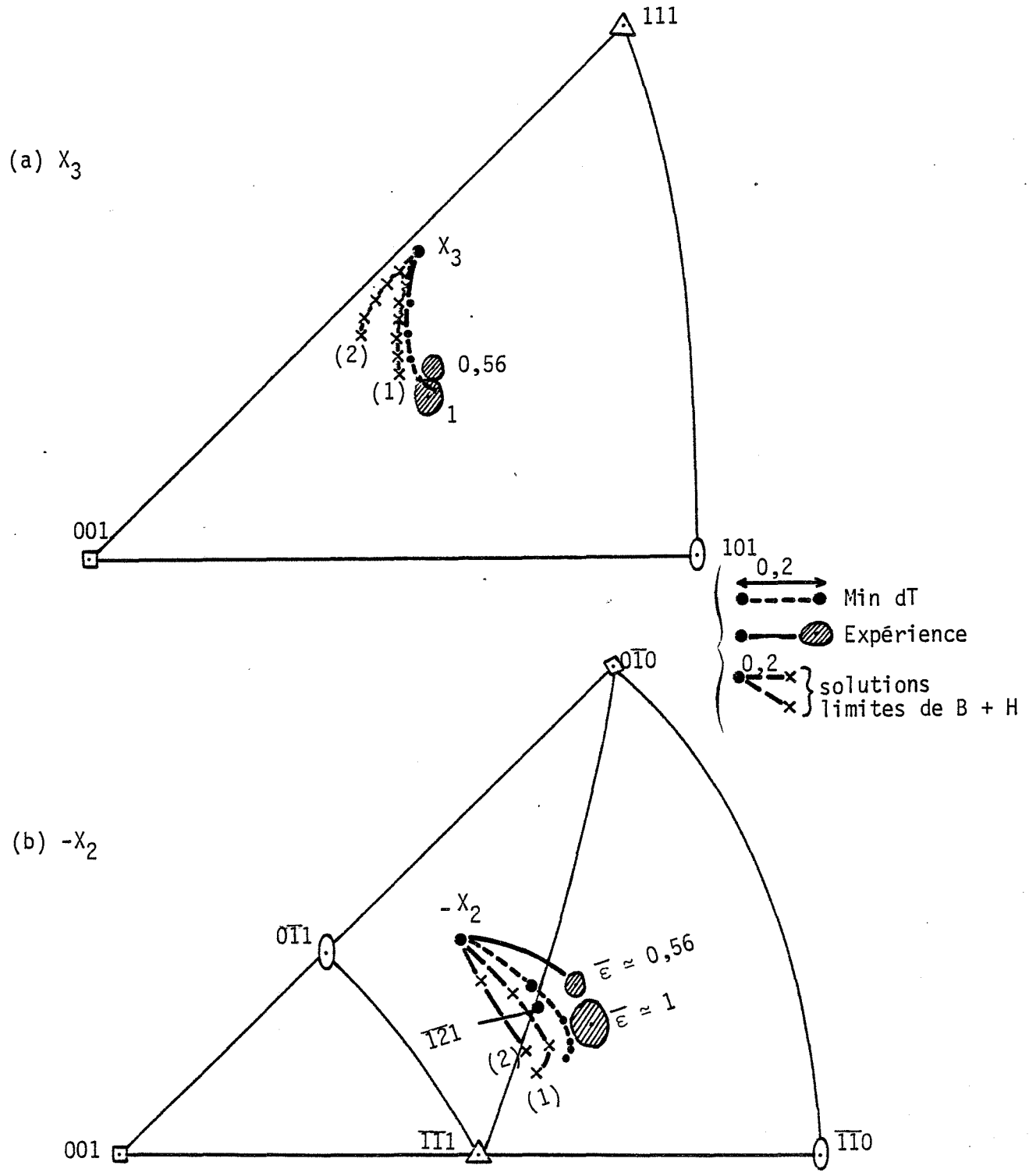


FIGURE 83 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_2 et X_3 de l'orientation initiale TD ≃ (112) [15$\bar{3}$]

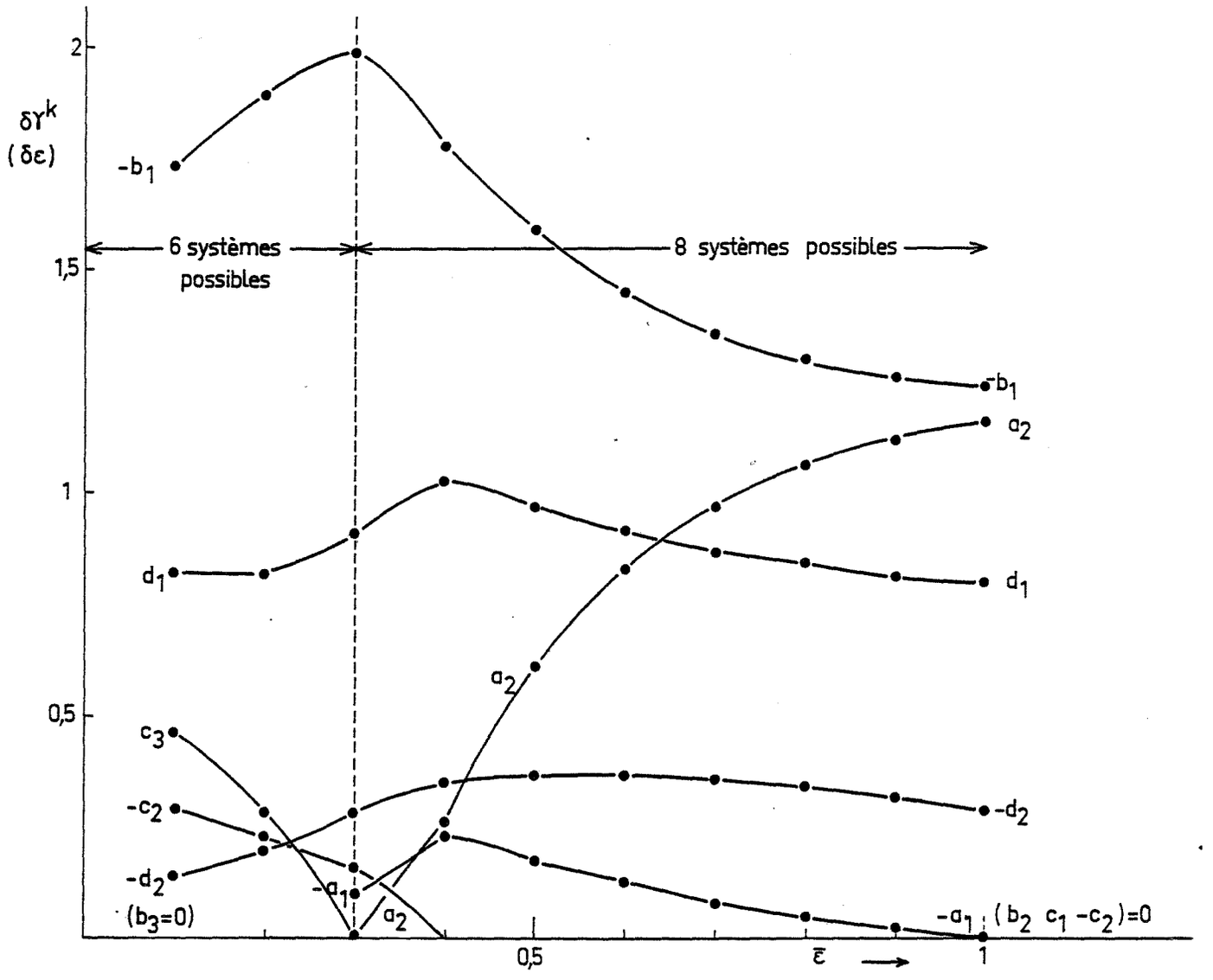


FIGURE 84 - Evolution des amplitudes théoriques de glissement en fonction de la déformation pour l'orientation initiale TE ≃ (583) [8$\bar{3}$5], compression plane "pure".

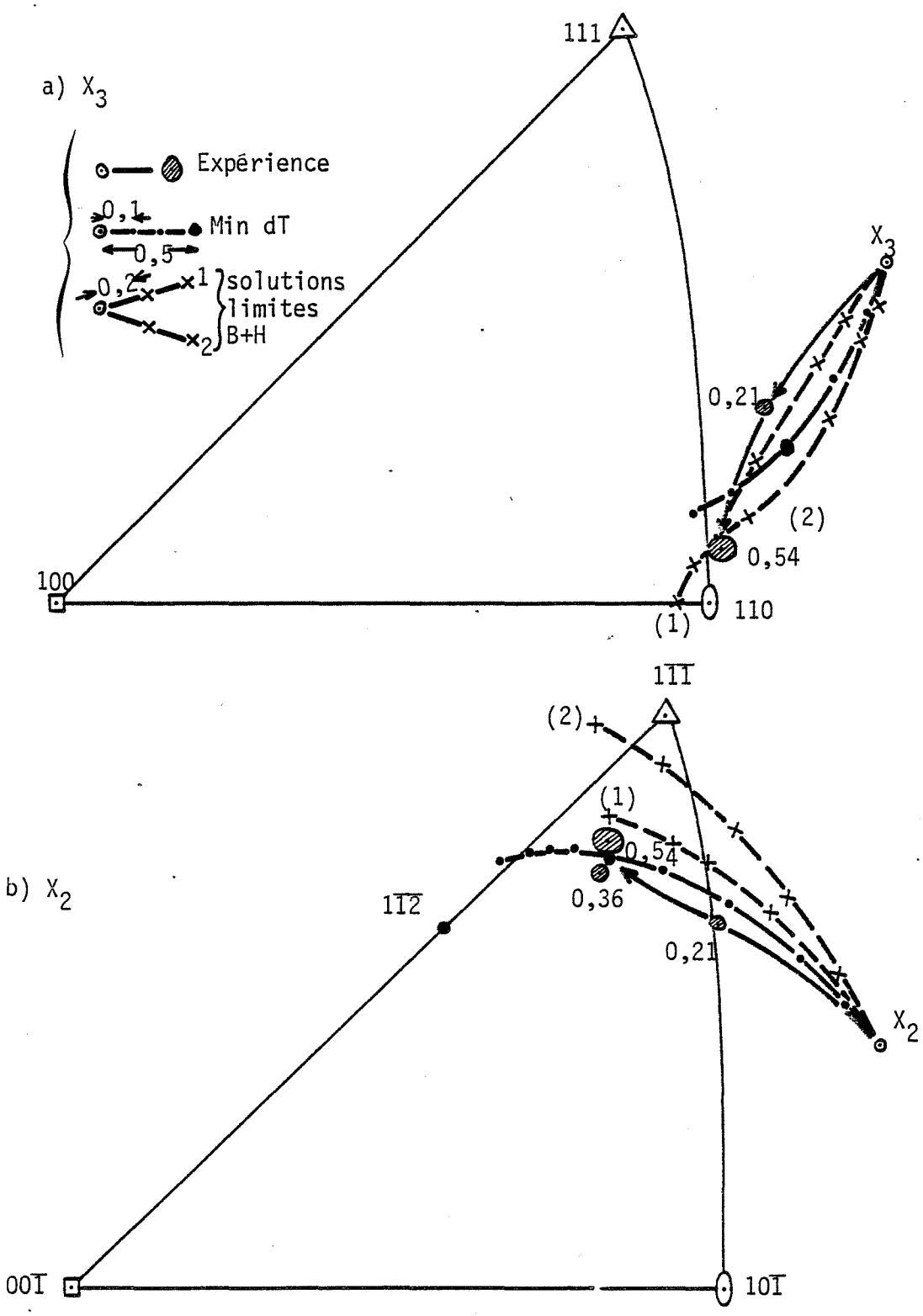


FIGURE 35 - Rotations théoriques et expérimentales de l'orientation initiale TE ≃ (583) [$\bar{8}35$]

figure 85 montre que le crital devrait tourner vers une orientation proche de (110) [1 $\bar{1}$ $\bar{2}$]. Les rotations expérimentales mesurées jusqu'à $\bar{\varepsilon} \simeq 0,5$ sont en très bon accord avec les trajectoires théoriques *(Figure 85)*. Ainsi l'orientation se stabilise à partir de $\bar{\varepsilon} \simeq 0,4$. L'essai de compression plane a été arrêté à une déformation $\bar{\varepsilon} \simeq 0,54$ à cause d'un début de formation d'une bande de déformation (un pliage) à l'intérieur du cristal ce qui nuit à l'homogénéité de déformation.

A une déformation faible de $\bar{\varepsilon} \simeq 0,11$, les plans de glissement visibles sont b(11$\bar{1}$) et d(1$\bar{1}$1), en accord avec la théorie.

Orientation TF $\simeq$ (10 10 1) [1 $\bar{1}$ $\bar{1}$].

Cette orientation, initialement proche de (110) [1 $\bar{1}$ $\bar{1}$], devrait tourner selon les calculs de minimisation de dT vers une orientation $\simeq$ (852) [2 $\bar{2}$ $\bar{3}$] avec une diminution de l'énergie de déformation plastique T de 4,07 τ_c $\delta\varepsilon$ à 3,49 τ_c $\delta\varepsilon$. *La figure 86* présente l'évolution théorique (correspondant à la minimisation de dT et à nos deux solutions limites) des énergies de déformation pour différentes rotations possibles . Au début, huit systèmes sont à l'état critique dont seuls les cinq systèmes ($-a_1$; a_2 ; $-b_1$; d_1 et $-d_2$) glisseraient. Au cours de la déformation, la rotation théorique amène le crital à une solution à six systèmes possibles avec glissement sur (a_2 ; $-b_1$; b_3 ; d_1 ; $-d_2$). *La figure 87* montre une indétermination de la rotation comme pour le cristal T_C. Par contre, à la différence de ce dernier, la solution prévue par la minimisation de dT ne correspond à aucune de nos deux solutions limites de BISHOP (ceci explique l'écart d'énergies théoriques présentées à *la figure 86*). Les rotations théoriques (importantes : de 15 à 20°) et expérimentales sont présentées à *la figure 87*. On constate un très bon accord pour l'axe d'allongement X_2 avec le résultat théorique donné par la minimisation de dT. Le plan de compression X_3 s'éloigne du plan (110) moins rapidement que prévu mais les écarts entre les orientations théoriques et expérimentales sont toujours inférieurs à quelques degrés. Enfin les systèmes dont les amplitudes de glissement sont significatives correspondent aux plans a, b et c qui sont les plans de glissement détectés.

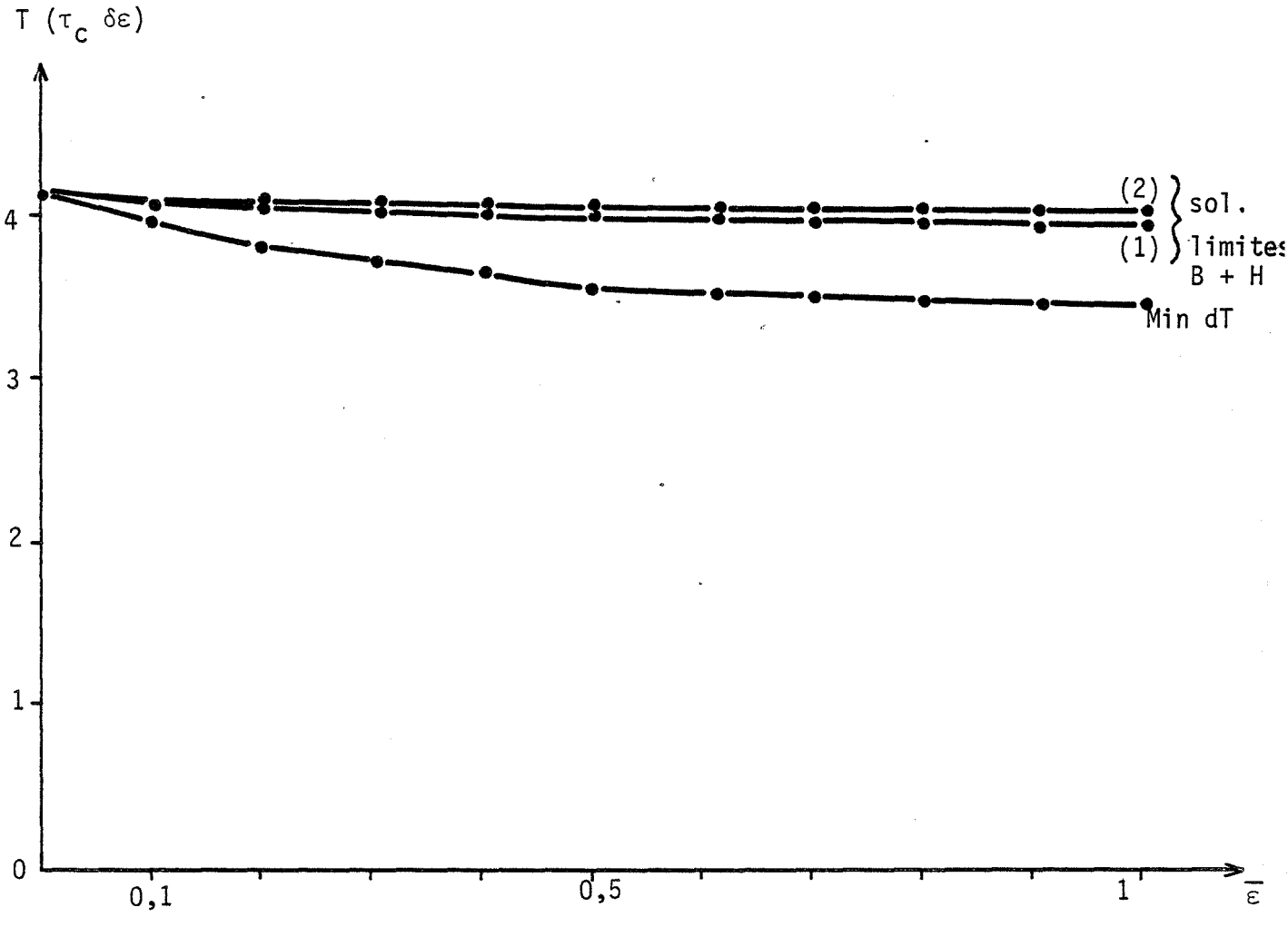


Figure 86 : Les variations de l'énergie de déformation plastique en fonction de la déformation calculées pour deux solutions BISHOP et HILL (1 et 2) et par la minimisation de dT, orientation initiale TF ∿ (10 10 1) [1 $\bar{1}$ $\bar{1}$]

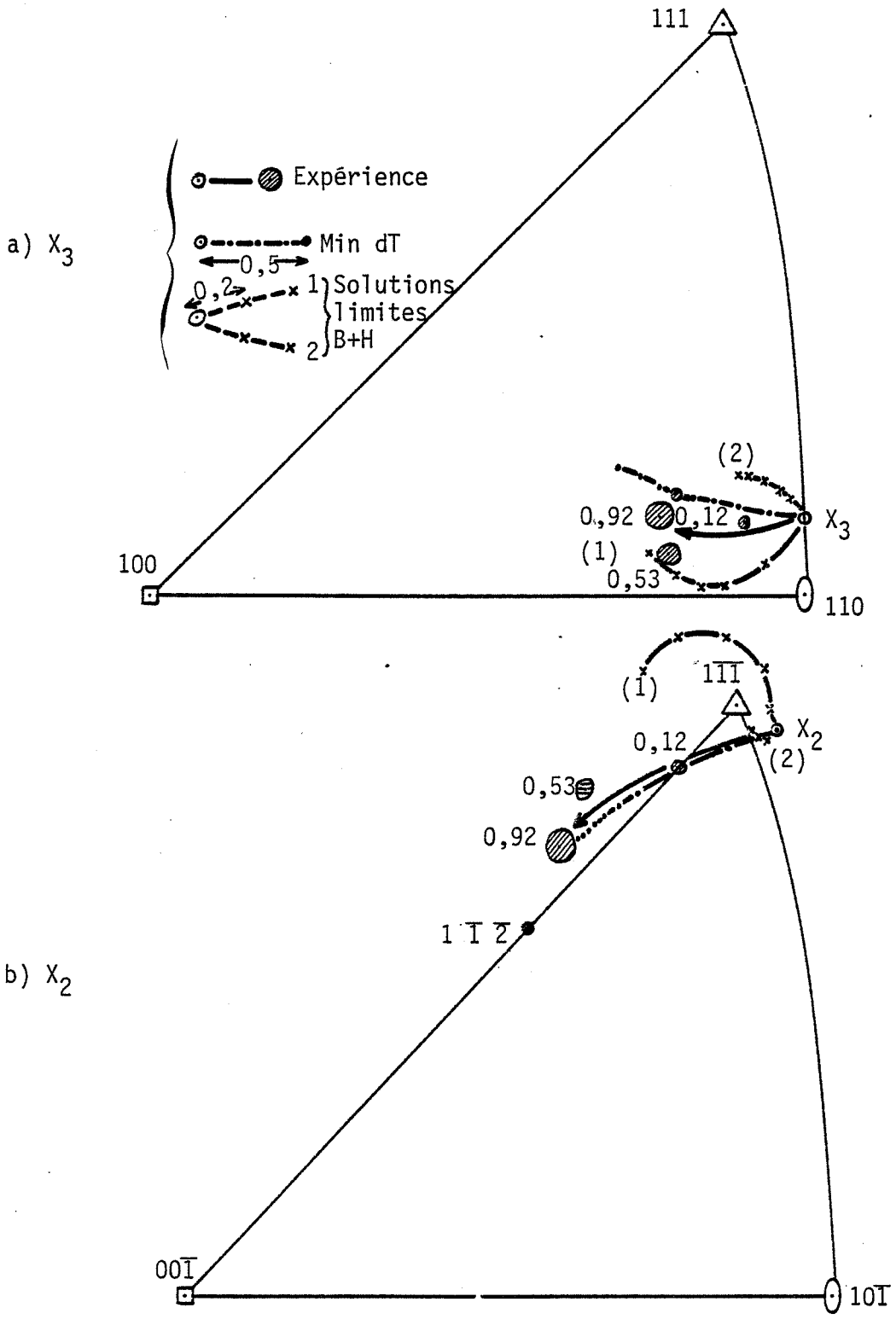


FIGURE 87 - Rotations théoriques et expérimentales de l'orientation initiale TF ≃ (10 10 1)[$1\bar{1}\bar{1}$]

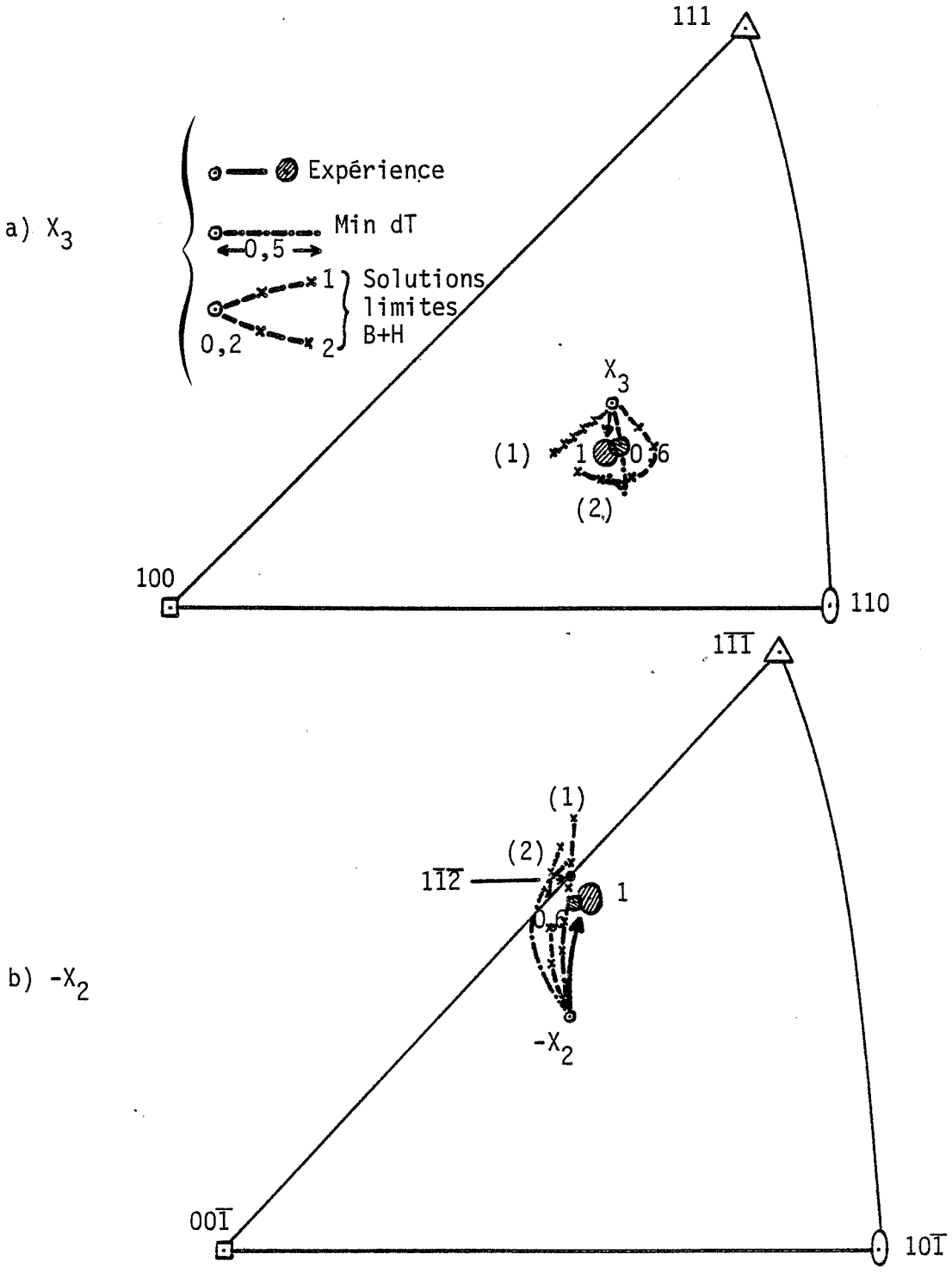


FIGURE 88 - Rotations théoriques et expérimentales de l'orientation initiale TG ≃ (852) [$\bar{4}$39]

Orientation TG ≃ (852) [$\bar{4}$ 3 9].

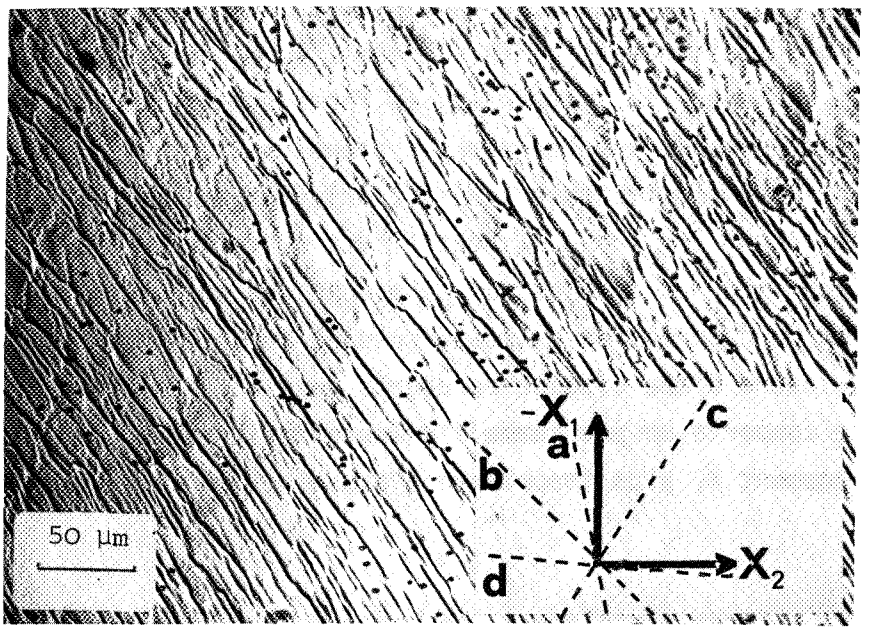
Six systèmes sont initialement à l'état critique *(Tableau V)* comme pour l'orientation voisine TA. De même, la minimisation de dT conduit à une amplitude nulle sur le système $-d_3$ et forte sur le système b_1. Par le calcul itératif on constate que les mêmes systèmes restent à l'état critique et que l'orientation tourne lentement vers l'orientation ∿ (641) [$\bar{1}$ 1 2]. *La figure 88* montre qu'il y a peu d'indétermination de la rotation théorique et que la rotation expérimentale est assez proche des trajectoires théoriques. En effet, le plan de compression X_3 reste presque invariant et la direction d'allongement X_2 tourne d'une dizaine de degrés vers [$\bar{1}$ 1 2] comme prévu. En fait le cristal se comporte un peu comme l'orientation TA avec une rotation de l'axe d'allongement X_2 plus importante à cause de son éloignement initial de [$\bar{1}$ 1 2].

Expérimentalement, on observe bien pour cette orientation, les traces des plans a et b sur lesquels les amplitudes théoriques de glissement sont les plus fortes *(Figure 89)*.

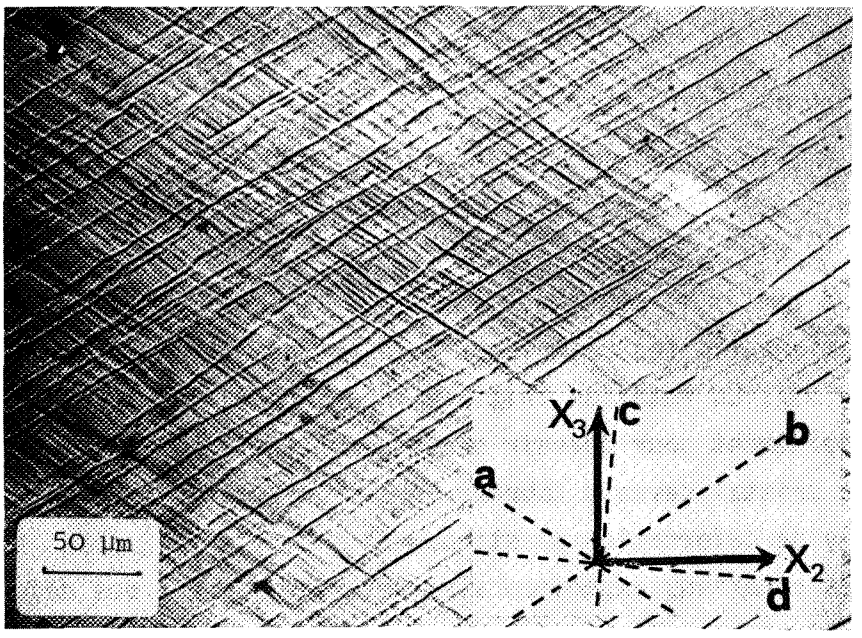
Orientation TH ≃ (221) [1 $\bar{2}$ 2].

Initialement, l'énergie de déformation plastique est relativement élevée ∿ 3,46 τ_c δε : il y a possibilité de glissements sur 8 systèmes *(Tableau V)*. Or cette indétermination d'ordre 3 ne conduit pas, pour cette orientation, à une indétermination importante pour les rotations. En effet, les deux rotations limites coïncident avec le chemin prévu par la minimisation de dT *(Figure 90)*. La rotation initiale théorique ($\bar{\varepsilon} < 0{,}4$) est importante et décroit rapidement pour devenir pratiquement nulle à $\bar{\varepsilon} = 0{,}8$. *La figure 90* montre que le cristal devrait tourner vers l'orientation proche de (241) [5 $\bar{4}$ 6] dont l'énergie de déformation plastique est ∿ 3,49 τ_c δε, aussi élevée qu'initialement. Les rotations expérimentales mesurées jusqu'à des déformations importantes ($\bar{\varepsilon} = 1$) sont en très bon accord avec les trajectoires théoriques prévues par tous ces calculs *(Figure 90)* et en particulier, l'orientation se stabilise à partir de $\bar{\varepsilon} = 0{,}5$ comme prévu.

Les amplitudes de glissement obtenues par le calcul de dT minimale sont présentées sur *la figure 91*. On constate initialement des glissements importants sur les systèmes b_2 et $-c_2$, avec une augmentation progressive de



Face X_3



Face X_1

FIGURE 89 - Traces des plans de glissement observées sur les faces de compression (X_3) et transverse (X_1). Orientation initiale TG ≃ (853) [538]

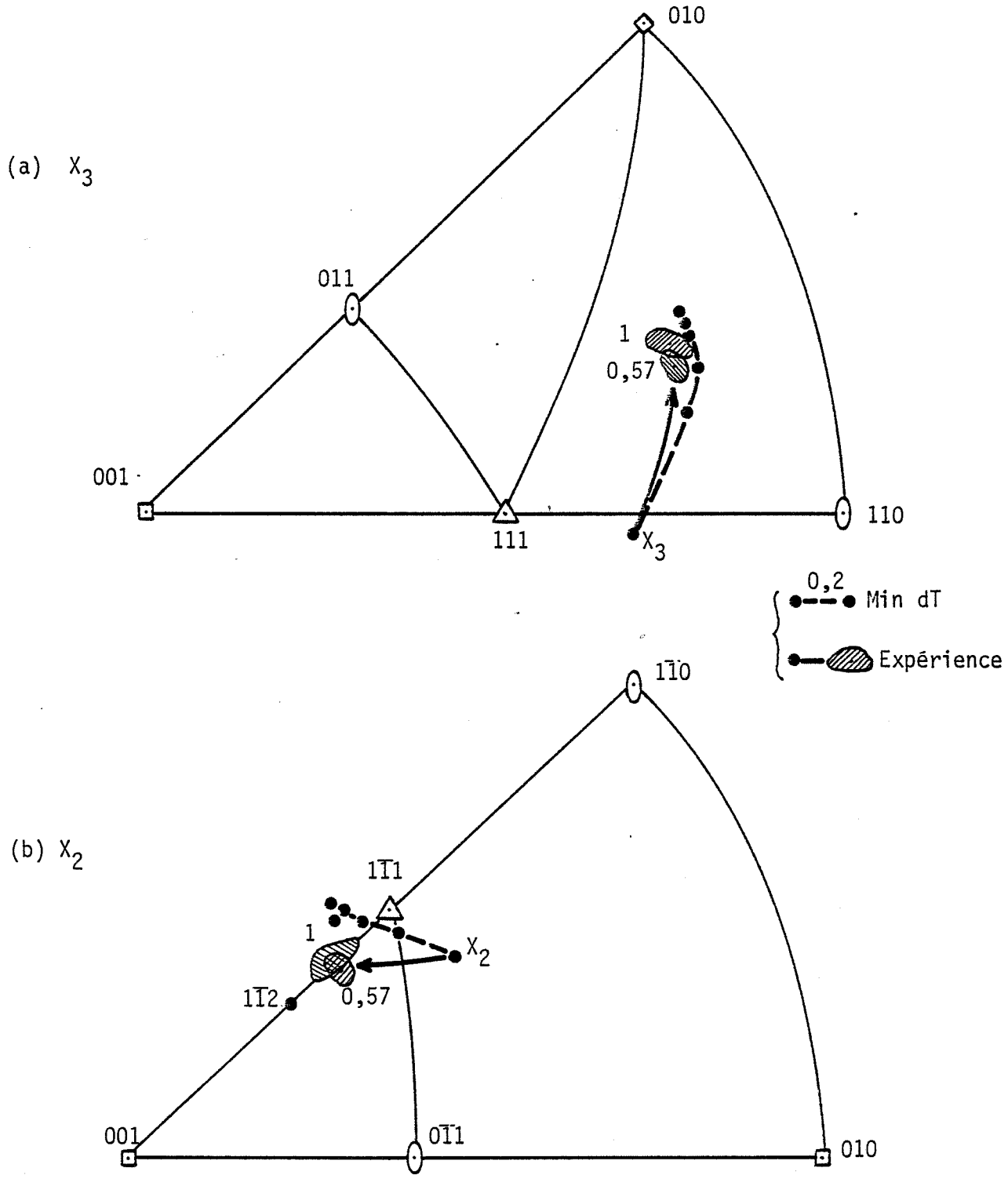


FIGURE 90 - Rotations théoriques et expérimentales de l'orientation initiale TH ≃ (221) [1$\bar{2}$2]

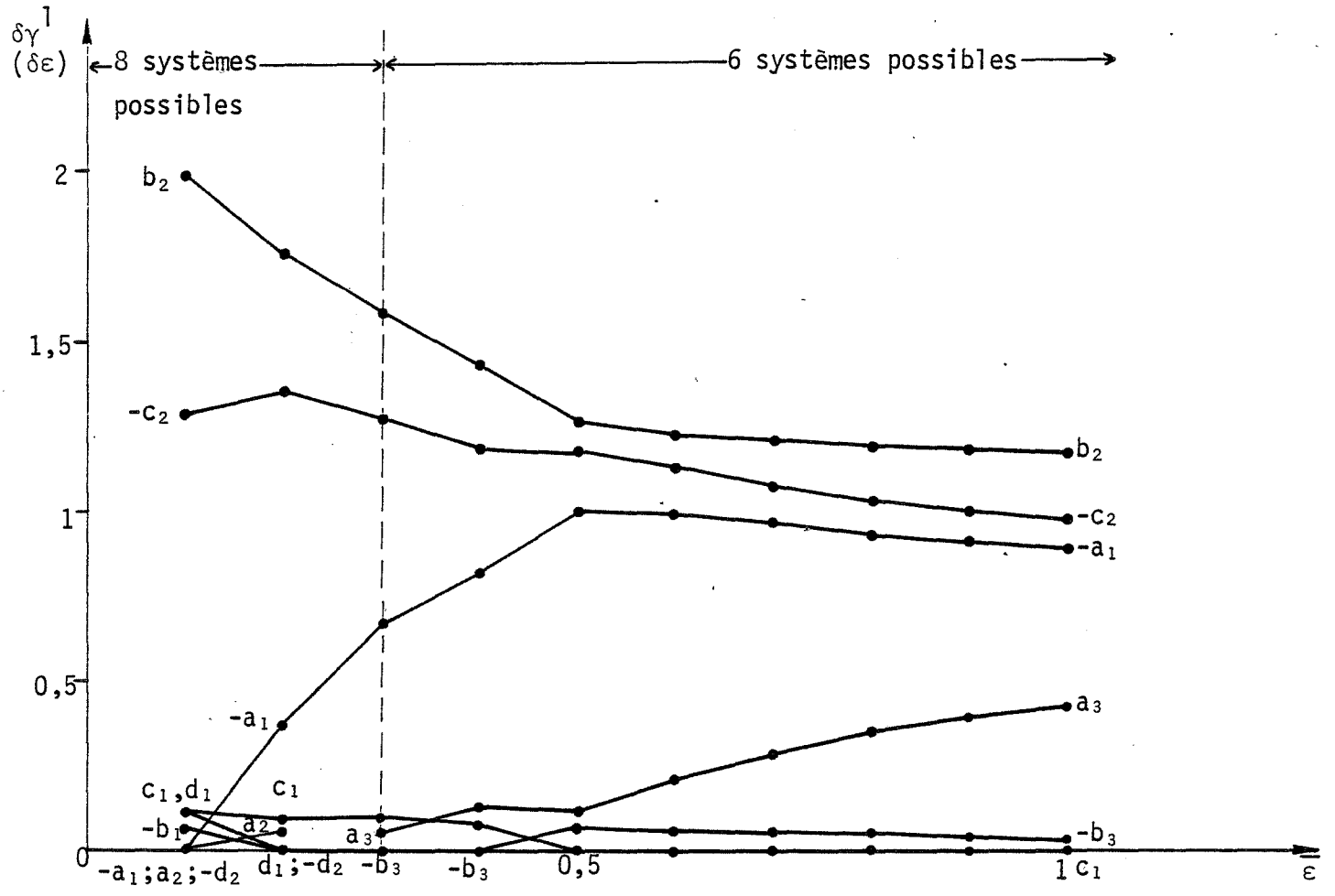


FIGURE 91 - Evolution des amplitudes théoriques de glissement $\delta\gamma^1$ en fonction de la déformation, orientation initiale TH ≃ (221) [1$\bar{2}$2]

l'amplitude sur le système $-a_1$. On notera que, comme pour les autres cristaux en compression plane pure, le critère de continuité de glissement est respecté. Les plans de glissement observé à une déformation faible ($\bar{\varepsilon} \simeq 0{,}15$), sont b et c en bon accord avec les systèmes prévus théoriquement.

Remarques :

Pour compléter ces résultats, les courbes contrainte-déformation des huit orientations testées sont présentées à *la figure 92*. Il faut souligner que les contraintes sont celles mesurées sur le tricristal et non pas sur le cristal central. On ne doit donc pas s'attendre à trouver une bonne corrélation avec les valeurs de l'énergie de déformation plastique $\bar{T}$ du cristal encastré. En fait, les tricristaux dont les énergies du cristal central sont faibles, se déforment en général avec des contraintes relativement faibles.

III.2.4 - DISCUSSION ET CONCLUSIONS.

L'objectif de ce *chapitre III.2* était de vérifier les théories de la déformation plastique de cristaux c.f.c. lorsque la déformation plastique est complètement imposée au cristal. Ces théories sont rappelons-le, basées sur les critères d'énergies du premier ordre (TAYLOR, BISHOP et HILL) et du second ordre (RENOUARD et WINTENBERGER).

La première étape qui consistait à imposer effectivement une déformation homogène et importante à un cristal a été atteinte grâce à une technique originale d'encastrement (Tricristal incompatible). Pour le première fois, nous avons pu réaliser, sur des cristaux d'orientations quelconques, un essai de compression plane parfaitement imposée jusqu'à des déformations importantes de l'ordre de 1 à 1,5 [52].

Le résultats expérimentaux (rotations cristallines et systèmes de glissement) pour huit orientations différentes sont présentés en détails et

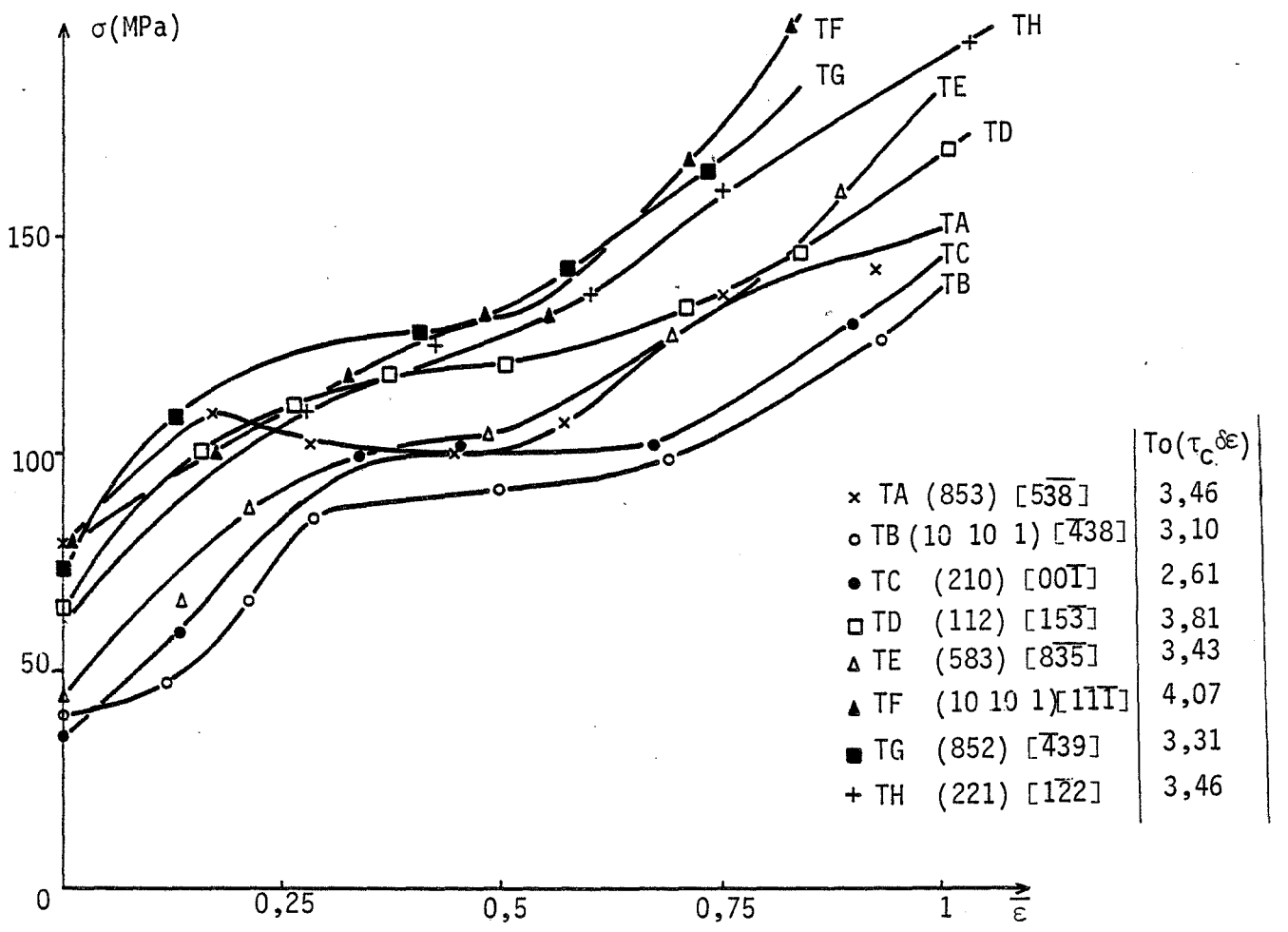


FIGURE 92 - Courbes contrainte-déformation des cristaux d'aluminium déformés en compression plane pure

comparés avec les résultats théoriques obtenus par les méthodes de BISHOP et HILL et de minimisation de dT pour de grandes déformations. D'après l'ensemble de nos résultats, nous pouvons faires les remarques suivantes :

- *L'indétermination de la rotation du réseau cristallin est très importante pour les cristaux TC et TF. Signalons que ces deux cristaux sont initialement proches d'orientations de haute symétrie et ont la possibilité de glisser sur huit systèmes. Pour ces deux orientations, la rotation expérimentale coïncide bien avec celle prévue par la minimisation de dT.*

- *Pour les cristaux TD et TE, l'indétermiantion est moins importante que pour les cas ci-dessus mais reste néanmoins supérieure à l'erreur expérimentale. Pour ces cas également, c'est la solution donnée par la minimisation de dT qui se rapproche le plus du chemin de rotation expérimentale.*

- *Pour les autres cristaux TA, TB, TG et TH, il n'y a pratiquement pas d'indétermination de la rotation. D'après nos calculs, l'indétermination serait inférieure à l'erreur expérimentale. Dans ce cas, les orientations obtenues montrent un accord raisonnable avec les orientations calculées par les deux méthodes (BISHOP et HILL et la minimisation de dT sur ordinateur).*

L'accord entre calculs théoriques et expérience pour le cas d'une déformation parfaitement imposée est facilité par le fait que le critère de continuité des glissements est toujours respecté comme l'ont indiqué RENOUARD et WINTENBERGER [34]. En effet, lorsque la déformation est complètement imposée, les états de contraintes calculés selon la méthode de BISHOP montrent que, contrairement au cas de conditions mixtes, il n'y a pas de systèmes "quasi critiques". Les cissions réduites sur les systèmes sont soit égales à τ_c, soit nulles. Cette continuité des systèmes critiques permet alors de minimiser réellement l'expression simplifiée de dT et conduit, par exemple, à des rotations continues sans oscillations.

Il convient ici de faire quelques remarques concernant la comparaison entre les solutions limites calculées et la solution qui correspond au minimum de dT. Lorsque six systèmes sont à l'état critique, la solution qui minimise dT correspond à l'une des deux solutions limites de BISHOP et HILL. En effet, dans ce cas, la fonction $dT(\delta\gamma^i)$ peut être considérer comme linéaire dans le domaine des solutions possibles *(voir chapitre II.4)*. Dans le cas d'une indétermination d'ordre 3, en raison du grand nombre de solutions possibles, le choix des deux solutions "extrêmes" n'est pas aussi facile surtout pour plusieurs incréments de déformations. Certaines solutions limites initialement divergentes peuvent converger après une déformation importante et vice-versa. De plus, la projection stéréographique des orientations théoriques, bien que pratique pour suivre leur évolution, ne permet pas de visualiser leurs positions relatives dans l'espace. Ainsi, la solution qui rend dT minimale ne coïncide pas toujours avec l'une des deux solutions limites choisie par notre critère du *paragraphe II.4.1*.

En résumé, il semble que les méthodes d'énergie du premier ordre (BISHOP et HILL) et du second ordre (RENOUARD et WINTENBERGER) soient valables pour des grandes déformations imposées à des cristaux d'aluminium. Il serait néanmoins intéressant de poursuivre cette étude avec d'autres orientations pour lesquelles l'indétermination de la rotation cristalline est très importante.

CHAPITRE IV

ETUDE DES ROTATIONS CRISTALLINES LORS DU LAMINAGE D'UNE TÔLE D'ALUMINIUM A GROS GRAINS

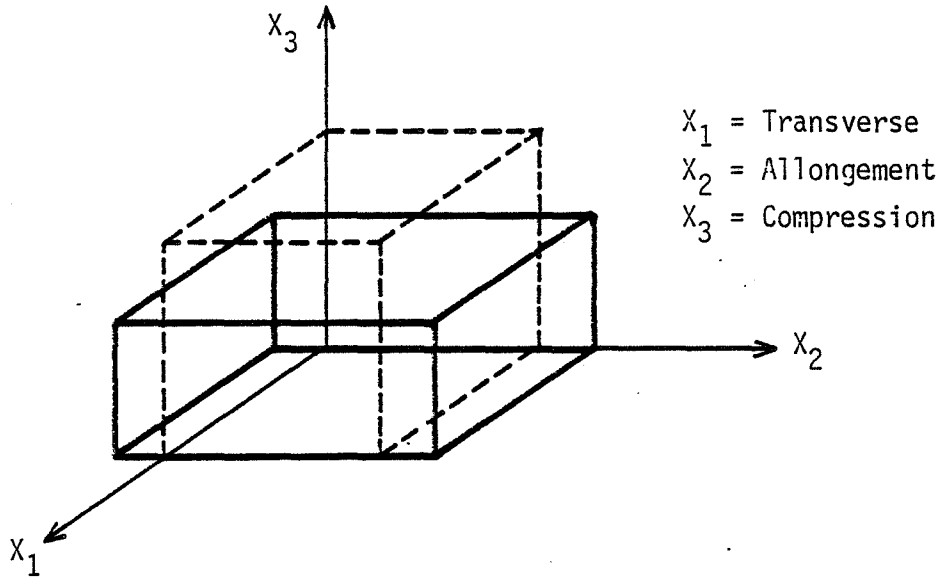
IV.1 - INTRODUCTION

Au chapitre précédent, nous avons confirmé la validité des théories basées sur les énergies de déformation plastique du premier et du deuxième ordre, dans le cas de la déformation homogène d'un monocristal en compression plane partiellement ou complètement imposée. L'objectif de cette partie d'étude est de tester ces théories sur des métaux polycristallins de structure c.f.c. Dans ce but, nous avons étudié sur les plans théoriques et expérimental, les rotations cristallines au cours du laminage de certains grains de tôles d'aluminium à gros grains. Nous supposerons que les cristaux ont un comportement rigide - plastique et que la consolidation est identique sur tous les systèmes de glissement.

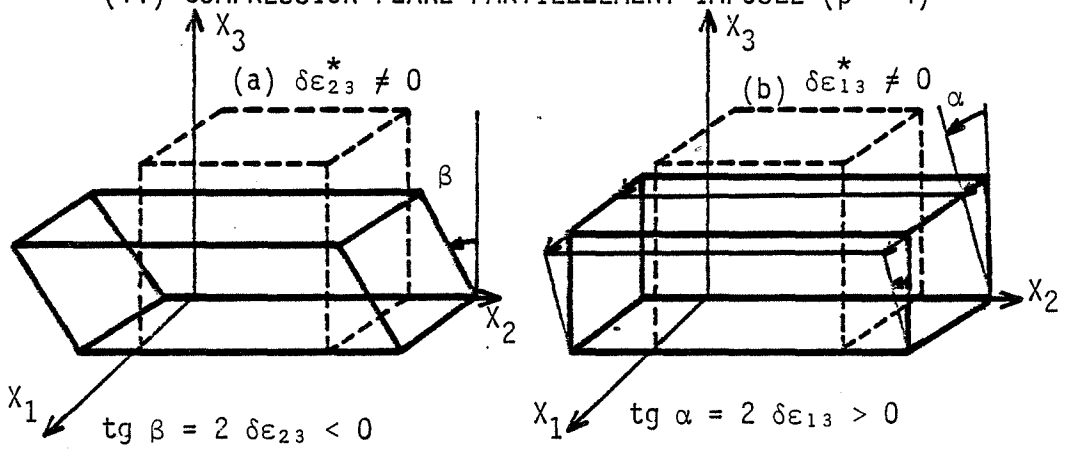
Au cours du laminage d'un polycristal, la rotation cristalline de chaque grain dépend des conditions limites de la déformation. Rappelons que selon l'hypothèse de TAYLOR [7], chaque grain se déforme de la même manière que l'agrégat polycristallin, c'est-à-dire avec cinq termes indépendants pour le tenseur des déformations $[\varepsilon]$ imposés. Dans le cas du laminage, la déformation de chaque grain correspondrait alors à une compression plane pure ($\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{33}$, les autres composantes étant nulles).

Pour les grains plats et allongés (après une grande déformation en laminage), HONNEFF et MECKING [25] suggèrent que la déformation

(i) COMPRESSION PLANE PURE (p = 5)



(ii) COMPRESSION PLANE PARTIELLEMENT IMPOSEE (p = 4)



(iii) COMPRESSION PLANE PARTIELLEMENT IMPOSEE (p = 3)

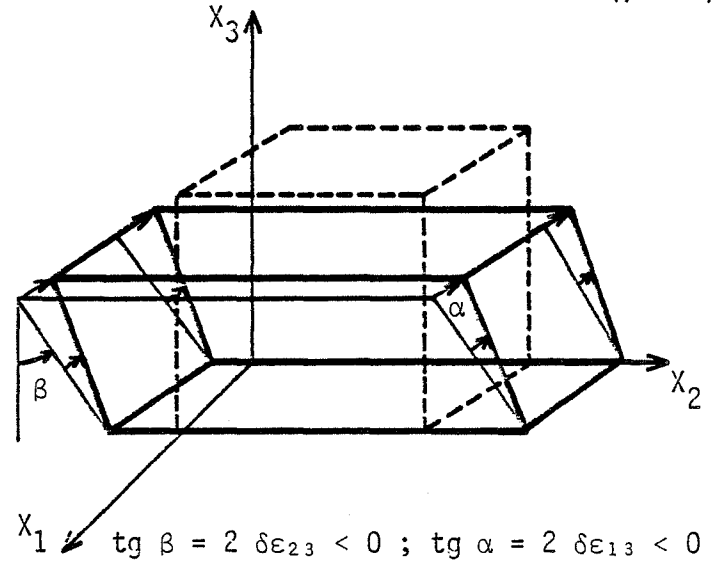


FIGURE 93 - Déformations possibles des grains dans une tôle laminée.

des grains n'est en fait pas complètement imposée. Les deux auteurs indiquent qu'alors, chaque grain du polycristal peut subir au plus deux cisaillements dans la dimension courte des grains, c'est-à-dire dans le sens X_3 de l'épaisseur pour le cas du laminage. Ceci entraine que seulement trois ou quatre composantes indépendantes $\delta\varepsilon_{ij}$ du tenseur des déformations soient imposées sur la plupart des grains. *La figure 93* montre les différents modes de déformations possibles des grains dans une tôle laminée.

Les petits déplacements associés aux cisaillements éventuels e^*_{23} et e^*_{13} non imposés seraient alors accommodés localement dans les zones voisines des joints de grains. L'idée relative à l'influence de la forme des grains sur le mode de déformation a été reprise par d'autres auteurs et notamment par les équipes de KOCKS et JONAS [33, 49]. Dans ces conditions, les rotations cristallines théoriques sont différentes de celles obtenues dans le cas où la déformation est complètement imposée et conduit par conséquent à d'autres textures théoriques de déformation. Pour tester ces modèles, nous avons confronté les rotations cristallines calculées pour ces différentes conditions limites de déformation avec les résultats expérimentaux obtenus sur deux tôles d'aluminium à gros grains laminées. L'étude expérimentale a été menée en deux temps ; d'abord par J. DRIVER (dans le cadre d'un contrat DGRST [50]) et dans un deuxième temps par l'auteur, en collaboration avec R. FORTUNIER (Ecole des Mines).

IV.2 - CALCULS THEORIQUES

Nous avons mis au point des calculs itératifs sur ordinateur afin de préciser les rotations cristallines pour les quatre conditions limites de déformations des grains *(Figure 93)*. Nous rappelons que les axes de référence choisis sont :

X_1 - *Direction transverse ;* X_2 - *Direction de laminage et* X_3 - *Axe de compression.*

Les hypothèses de calculs sont présentées ci-dessous, les méthodes utilisées dans les calculs numériques étant détaillées au deuxième chapitre.

/a/ Compression plane pure

Pour ce cas où la déformation est complètement imposée (hypothèse de TAYLOR) les cinq termes $\delta\varepsilon_{ij}$ indépendants sont tous imposés aux grains (p = 5), soit :

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta\varepsilon_{12} = \delta\varepsilon_{13} = \delta\varepsilon_{23} = 0 \quad \text{et} \quad \delta\varepsilon_{22} = (-\delta\varepsilon_{33}).$$

Comme pour le cas de compression plane pure des cristaux encastrés, deux types de solutions sont considérés :

(*i*) *solutions limites de la rotation cristalline de BISHOP et HILL qui rendent maximum l'énergie de déformation* $\delta T = \sum_{ij} \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}$ *. Ces solutions "extrêmes" sont calculées selon la méthode décrite au paragraphe II.4.1.*

(*ii*) *la solution qui minimise la variation de l'énergie du deuxième ordre dT en fonction de la rotation par la méthode décrite au paragraphe II.4.1.3, selon l'hypothèse de RENOUARD et WINTENBERGER* [34].

/b/ Compression plane partiellement imposée

Nous avons envisagé trois cas de déformation en permettant des cisaillements dans le sens de l'épaisseur *(Figure 93)*.

(1) 3 $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés (p = 3), soit :
$\delta\varepsilon_{11} = \delta\varepsilon_{12} = 0$ et $\delta\varepsilon = (\delta\varepsilon_{22} = -\delta\varepsilon_{33})$; $\delta\varepsilon_{13}$ et $\delta\varepsilon_{23}$ non imposés.

Le tenseur des contraintes à la forme $\begin{pmatrix} \sigma^*_{11} & \sigma^*_{12} & 0 \\ \sigma^*_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^*_{33} \end{pmatrix}$

avec $\sigma^*_{11} + \sigma^*_{22} + \sigma^*_{33} \neq 0$

(2) 4 $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés (p = 4 (a), *Figure 93*) :

$\delta\varepsilon_{11} = \delta\varepsilon_{12} = \delta\varepsilon_{13} = 0$ et $\delta\varepsilon_{22}$ (= - $\delta\varepsilon_{33}$) ; $\delta\varepsilon_{23}$ non imposé.

Le tenseur des contraintes à la forme $\begin{pmatrix} \sigma^*_{11} & \sigma^*_{12} & \sigma^*_{13} \\ \sigma^*_{12} & 0 & 0 \\ \sigma^*_{13} & 0 & \sigma^*_{33} \end{pmatrix}$

avec $\sigma^*_{11} + \sigma^*_{22} + \sigma^*_{33} \neq 0$

(3) 4 $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés (p = 4 (b), *Figure 93*) :

$\delta\varepsilon_{11} = \delta\varepsilon_{12} = \delta\varepsilon_{23} = 0$ et $\delta\varepsilon_{22}$ (= - $\delta\varepsilon_{33}$) ; $\delta\varepsilon_{13}$ non imposé.

Le tenseur des contraintes $[\sigma]$: $\begin{pmatrix} \sigma^*_{11} & \sigma^*_{12} & 0 \\ \sigma^*_{12} & 0 & \sigma^*_{23} \\ 0 & \sigma^*_{23} & \sigma^*_{33} \end{pmatrix}$

avec $\sigma^*_{11} + \sigma^*_{22} + \sigma^*_{33} \neq 0$

Pour chaque grain, on détermine l'état des contraintes σ_{ij} correspondant à l'énergie externe maximale $\delta T = \sum_{i,j} \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij} = - \sigma^*_{33}\, \delta\varepsilon$ (exprimé en fonction de la cission critique τ_c et l'incrément de déformation $\delta\varepsilon$), ce qui permet de trouver les systèmes de glissement à l'état critique et leurs amplitudes $\delta\gamma^l$ (en minimisant la variation de l'énergie du second ordre (dT) si besoin est).

Ces méthodes de calcul ont été décrites en détails et appliquées en compression de monocristaux d'aluminium dans le troisième chapitre. Par rapport à ces études nous soulignons que, dans le cas présent, $\delta\varepsilon_{12}$ est supposé nul mais $\delta\varepsilon_{13}$ peut être nul (p = 4 (a)) ou différent de zéro (p = 4 (b) ou p = 3).

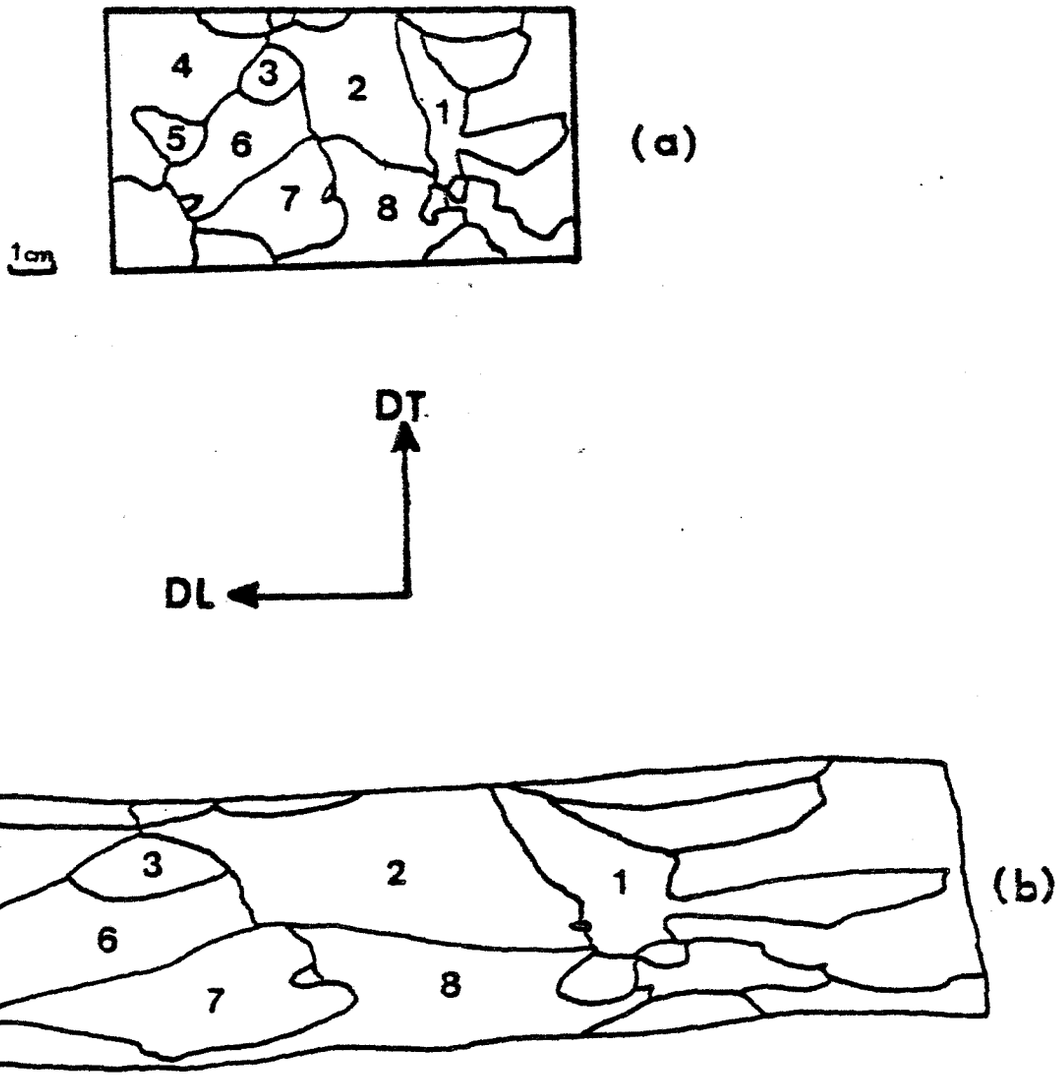


FIG. 94 - **Déformations des grains dans la tôle A**

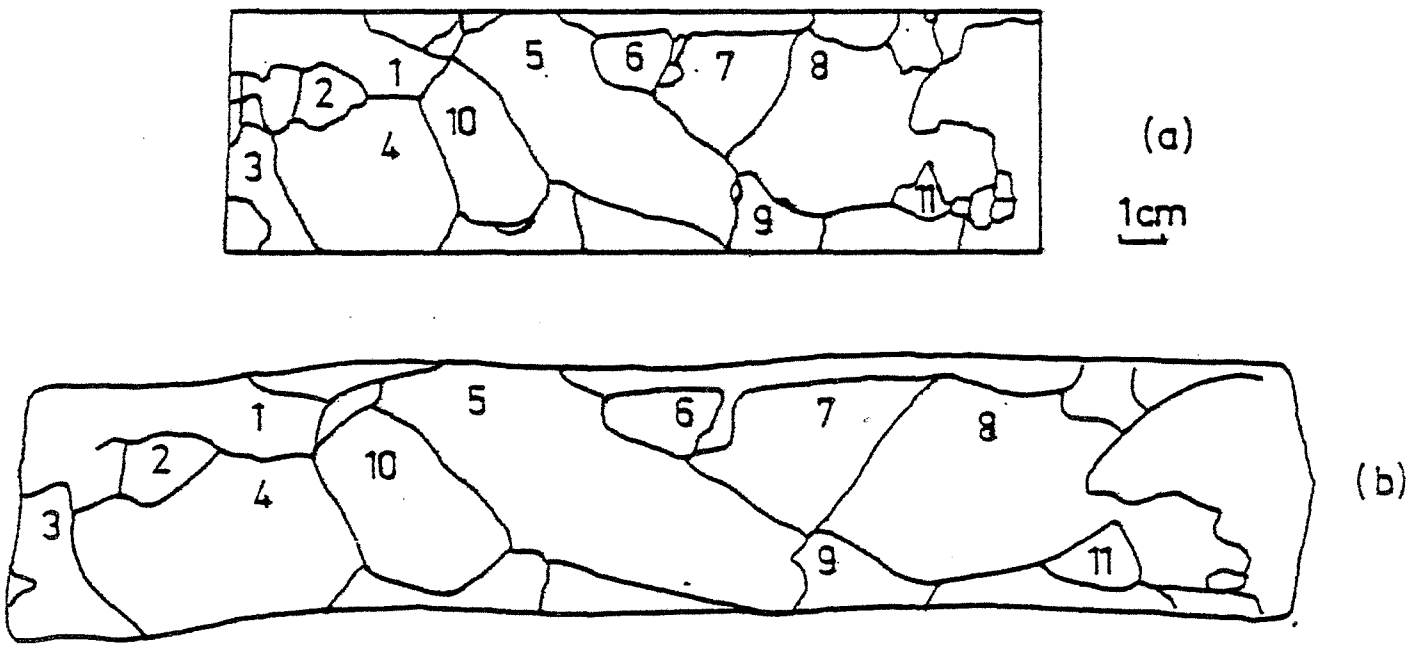
(a) $\bar{\varepsilon}=0$; (b) $\bar{\varepsilon}=-0,98$

IV.3 - TECHNIQUE EXPERIMENTALE

Les deux tôles d'aluminium raffiné (99,99 %) d'épaisseur 2mm pour la tôle (A) et 4 mm pour la tôle (B) *(Figure 94 (a) et 95 (a))* contiennent des grains de 10 à 40 mm de diamètre de sorte que chaque grain traverse l'épaisseur. Elles ont été obtenues par la méthode de l'écrouissage critique par M. BOUTIN au Centre de Recherches de Voreppe de "ALUMINIUM PECHINEY" . Avant déformation, une grille (espacement $\sim$ 2 mm pour la tôle (A) et $\sim$ 10 mm pour la tôle (B)) est tracée à la surface de chaque tôle pour suivre l'évolution de la forme des grains au cours du laminage, et par conséquent, mesurer pour chaque grain, les déformations ε_{11}, ε_{22} et ε_{12}. Cette grille est également indispensable comme repère pour préciser les rotations cristallines. Pour réduire le frottement superficiel tôle - cylindres qui pourrait d'une part effacer les repères et, d'autre part créer des déformations superficielles de cisaillement, chaque tôle est laminée entre deux feuilles minces de téflon. Les passes, effectuées toujours dans le même sens, sont de 0,1 mm. La tôle (A) est laminée à une déformation $\bar{\varepsilon}$ = 1,7 (réduction de 80% de l'épaisseur). Nous avons constaté alors que la rotation entre $\bar{\varepsilon}$ = 1 et 1,7 est faible. Par conséquent, la tôle (B) n'a été laminée qu'à $\bar{\varepsilon}$ = 1 (réduction de l'épaisseur de 60% environ). Les orientations des grains repérés 1A à 8A et 1B à 11B sont déterminées au centre de chaque grain par analyse aux R-X. La méthode de Laüe en retour est utilisée pour des taux de déformations rationnelles allant de 0 à 0,3 et, pour des déformations plus importantes, une analyse de texture (méthode des figures de pôles, *voir chapitre I)* devient nécessaire.

IV.4 - RESULATS EXPERIMENTAUX

Nous présentons ici les résultats obtenus sur les deux tôles d'aluminium, l'une à 8 gros grains (tôle (A)) et l'autre à 11 grains tôle (B)). *Les figures 94 et 95* présentent la forme des grains des deux tôles avant et après laminage. En accord avec les hypothèses de calcul, on constate que les déformations moyennes ε_{11} et ε_{22} des grains sont presque



TÔLE B

(a) $\varepsilon = 0$; (b) $\bar{\varepsilon} = -0{,}5$

FIGURE 95 - Déformation des grains dans la tôle B.

identiques aux déformations imposées à la tôle. De même, les cisaillements e^*_{12} des grains sont pratiquement nuls. Notons que, dans la tôle (B), plusieurs grains ont pratiquement la même orientation initiale (1 et 6) ; (4 et 7) ; (3 et 9) ; (5, 10 et 11). Les grains de même orientation semblent se comporter de la même manière. Ainsi, pour alléger la présentation des résultats, nous ne présenterons que ceux relatifs aux grains 1B, 4B, 3B et 5B.

Pour les deux tôles, les rotations des grains varient, suivant l'orientation, de 0 à 40° *(Tableaux VI et VIII)* pour une déformation rationnelle $\bar{\varepsilon}_{22}$ de 1 (ou 1,7). Après déformation, les directions normales au plan de la tôle X_3 *(Figure 96)* se concentrent autour de {146} ou de {110}, et les directions de laminage X_2 ont tendance à se grouper dans la zone comprise entre <0 0 1>, <1 1 1> et <1 2 2> *(Figure 97)*. Les résultats expérimentaux et théoriques obtenus pour différents grains sont regroupés sur *les tableaux VI et VII* pour la tôle A, *VIII et IX* pour la tôle B. Pour simplifier la présentation des résultats, nous avons rassemblé les grains dans 3 groupes qui ont, semble-t-il, le même type de comportement, à savoir :

- *groupe 1* *compression plane partiellement imposée* $p = 3$;
- *groupe 2* *compression plane pure avec* $p = 5$;
- *groupe 3* *cas ambigus*.

GROUPE 1 (grains 1A, 2A, 6A, 8A, 5B et 8B)

Expérimentalement, les rotations cristallines de ces grains se rapprochent de celles calculées pour le cas où seulement 3 $\delta\varepsilon_{ij}$ sont imposés *(c.f. tableaux VI à IX)*. *Les figures 98 et 99*, qui présentent les trajectoires théoriques des grains 2A et 5B pour p = 3 et p = 5, illustrent très clairement ce comportement. Par exemple pour le grain 2A, *la figure 98* montre que, pour p = 5, parmi toutes les solutions possibles, celle qui rend dT minimale (branche (2)) est la plus proche des résultats expérimentaux. Cependant, cet accord n'est pas très satisfaisant. En effet, les amplitudes des rotations mesurées sont beaucoup plus fortes que celles prévues pour p = 5 avec, en plus, des chemins

TABLEAU VI : ORIENTATIONS EXPERIMENTALES DES GRAINS DE LA TOLE A

GRAIN	AXE	ORIENTATIONS		ROTATION DES AXES	REMARQUES
		$\varepsilon = 0$	$\bar{\varepsilon} = 1$		
1A	X3	$(\bar{1}7\ \bar{4}0\ 90)$	$(\bar{4}2\ 10\ \bar{8}3)$	40°	Rotation très importante autour de
	X2	$[\bar{2}4\ 90\ 34]$	$[\bar{1}1\ 99\ \bar{1}2]$	39°	X1 vers {0 1 2} <1 0 0>
2A	X3	(40 77 50)	$(\bar{6}\ 78\ 64\ )$	27°	Rotation importante autour de
	X2	$[91\ \bar{2}6\ \bar{3}1]$	$[98\ 10\ \bar{1}4]$	24°	X1 vers {0 1 1} <1 0 0>
3A	X3	$(60\ \bar{1}2\ 79)$	$(64\ \bar{0}7\ 77)$	2°	Rotation nulle
	X2	$[\bar{3}3\ 86\ 38]$	$[\bar{3}4\ 87\ 37]$	1°	Orientation proche de {0 1 1} <1 1 2>
4A	X3	$(29\ \bar{5}6\ 78)$	$(\bar{1}4\ \bar{5}7\ 81)$	24°	Rotation importante autour de
	X2	[33 82 47]	[47 70 56]	23°	X1 vers {1 4 6} <5 7 6>
5A	X3	$(51\ \bar{2}9\ 81)$	(57 14 $\bar{8}3$)	26°	Rotation importante autour de
	X2	$[81\ 48\ \bar{3}4]$	$[53\ 71\ \bar{3}3]$	33°	X1 vers {4 1 6} <5 7 3>
6A	X3	$(39\ \bar{5}0\ 78)$	$(64\ \bar{1}4\ 77)$	24°	Rotation importante vers
	X2	[10 86 50]	$[\bar{2}4\ 90\ 37]$	20°	{0 1 1} <2 3 9>
7A	X3	$(31\ \bar{3}6\ 88)$	$(21\ \bar{5}6\ 83)$	13°	Rotation faible autour de
	X2	$[\bar{8}3\ 34\ 44]$	$[\bar{8}2\ 41\ 44]$	4 °	X2 vers {1 3 4} <1 1 2>
8A	X3	$(33\ \bar{2}3\ 91)$	$(62\ \bar{1}7\ 77)$	19°	Rotation autour de X2 vers
	X2	$[\bar{1}6\ 94\ 29]$	$[\bar{1}9\ 92\ 34]$	5°	{0 1 1} <2 3 9>

TABLEAU VIII : ORIENTATIONS EXPERIMENTALES DES GRAINS DE LA TOLE B

GRAIN	AXE	ORIENTATIONS		ROTATION DES AXES	REMAROUES
		$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$		
1B	X3	(19 56 83)	(00 74 68)	12°	Rotation
	X2	[$\overline{39}$ 78 $\overline{44}$]	[$\overline{42}$ 62 67]	20°	vers {0 1 1} <4 6 7>
2B	X3	(09 80 60)	(16 88 50)	13°	Rotation relativement faible
	X2	[12 59 $\overline{80}$]	[04 47 $\overline{88}$]	10°	vers {2 5 9} <0 5 9>
3B	X3	(04 74 68)	(00 77 67)	3°	Rotation faible autour de X_3
	X2	[12 66 $\overline{73}$]	[29 58 $\overline{75}$]	8°	vers {0 1 1} <3 6 7>
4B	X3	($\overline{14}$ 85 52)	(14 86 50)	11°	Rotation relativement faible
	X2	[$\overline{40}$ 43 $\overline{82}$]	[$\overline{44}$ 50 $\overline{74}$]	7°	vers {1 9 5} <4 5 7>
5B	X3	(28 43 87)	(50 $\overline{19}$ 85)	35°	Rotation importante autour de X1
	X2	[$\overline{41}$ 87 $\overline{29}$]	[$\overline{22}$ 93 34]	37°	vers {2 5 9} <2 3 9>
6B	X3	(17 87 49)	($\overline{07}$ 74 70)	17°	Rotation
	X2	[$\overline{49}$ $\overline{35}$ 79]	[$\overline{44}$ $\overline{63}$ 64]	12°	vers {0 1 1} <5 6 6>
7B	X3	($\overline{14}$ 88 45)	(19 85 52)	15°	Rotation
	X2	[$\overline{48}$ 33 $\overline{79}$]	[$\overline{47}$ 53 $\overline{73}$]	9°	vers {1 9 5} <5 5 7>
8B	X3	($\overline{07}$ $\overline{19}$ 99)	($\overline{38}$ 24 90)	33°	Rotation importante autour de
	X2	[$\overline{39}$ 91 12]	[$\overline{29}$ 88 $\overline{36}$]	30°	X1 vers {2 4 9} <3 4 9>
9B	X3	(01 77 64)	(04 81 59)	3°	Rotation autour de X_3
	X2	[02 64 $\overline{77}$]	[$\overline{09}$ 59 $\overline{81}$]	7°	vers {0 4 3} <1 6 8>
10B	X3	(28 44 85)	(50 $\overline{19}$ 84)	35°	Rotation importante autour de
	X2	[$\overline{41}$ 84 $\overline{26}$]	[$\overline{22}$ 92 33]	37°	X1 vers {2 5 9} <2 3 9>
11B	X3	(24 39 88)	(48 $\overline{16}$ 86)	34°	Rotation importante autour de
	X2	[47 $\overline{85}$ 23]	[24 $\overline{94}$ $\overline{31}$]	36°	vers X1 {2 5 8} <2 3 9>

TABLEAU VII : RESULTATS THEORIQUES DE LA TOLE A

GRAIN	CONDITIONS DE DEFORMATION	INITIAL $\bar{\varepsilon} = 0,1$			FINAL $\bar{\varepsilon} = 1$	
		$T_0(\tau_c \quad \delta\varepsilon)$	SYSTEMES DE GLISSEMENT	CISAILLEMENTS	ORIENTATIONS	CISAILLEMENTS
1A	p = 3	3,105	B1,C1,-C3	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,09 $\bar{\varepsilon}_{13}$ = 0,04	$(\overline{57}\ \overline{01}\ 82)[\overline{04}\ 99\ \overline{03}]$	$\bar{\varepsilon}_{23}$=-0,26 $\bar{\varepsilon}_{13}$= 0,18
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,308	-A3,-B2,C3,-D2	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0	$(35\ \overline{33}\ 87)[\overline{49}\ 73\ 46]$	$\bar{\varepsilon}_{23}$=-0,14
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,305	-A3,-B2,-C3,-D2	$\bar{\varepsilon}_{13}$ = 0	$(32\ \overline{32}\ 89)[\overline{62}\ 62\ 44]$	$\bar{\varepsilon}_{13}$= 0,08
	p = 5	3,310	A1,-A3,B1,-B2,C1,-C3,D1,-D2		$(30\ \overline{33}\ 90)[\overline{54}\ 71\ 43]$	
2A	p = 3	2,648	B2, -C2,C3	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,017 $\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,002	$(\overline{01}\ 75\ 66)[99\ 10\ \overline{08}]$	$\bar{\varepsilon}_{23}$= 0,1 $\bar{\varepsilon}_{13}$=-0,03
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	2,769	A3,B3,-C2,C3,-D2,D3	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,06	$(\overline{01}\ 76\ 65)[99\ 10\ \overline{10}]$	$\bar{\varepsilon}_{23}$= 0,12
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,100	-B1,B3,-C2,C3,-D2	$\bar{\varepsilon}_{13}$ = 0,03	$(34\ 93\ 15)[88\ \overline{37}\ 27]$	$\bar{\varepsilon}_{13}$=-0,12
	p = 5	3,349	-B1,B3,-C2,C3,D1,-D2		$(03\ 88\ 48)[99\ \overline{02}\ \overline{01}]$	
3A	p = 3	2,825	B3,D1,-D2	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,07 $\bar{\varepsilon}_{13}$ = 0,02	$(54\ \overline{26}\ 79)[\overline{34}\ 78\ 52]$	$\bar{\varepsilon}_{23}$=-0,94 $\bar{\varepsilon}_{13}$= 0,08
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	2,856	-B1,B3,D1,-D2	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,07	$(58\ \overline{25}\ 77)[\overline{31}\ 81\ 50]$	$\bar{\varepsilon}_{23}$=-0,78
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	2,940	-A3,B3,D1,-D2	$\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,01	$(53\ \overline{15}\ 84)[\overline{42}\ 81\ 41]$	$\bar{\varepsilon}_{13}$= 0,03
	p = 5	2,945	A1,-A3,-B2,B3,D1,-D2		$(53\ \overline{14}\ 84)[\overline{42}\ 81\ 41]$	
4A	p = 3	3,458	-A3,-B2,-C3	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,04 $\bar{\varepsilon}_{13}$ = 0,01	$(11\ \overline{39}\ 92)[\overline{33}\ 86\ 40]$	$\bar{\varepsilon}_{23}$=-0,34 $\bar{\varepsilon}_{13}$=-0,22
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,520	-A3,-B2,C2,-C3	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,03	$(\overline{17}\ \overline{40}\ 91)[32\ 85\ 43]$	$\bar{\varepsilon}_{23}$=-0,37
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,832	-A3,-B2,B3,C2	$\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,03	$(27\ \overline{88}\ 41)[62\ 48\ 62]$	$\bar{\varepsilon}_{13}$=-0,40
	p = 5	4,011	A2,-A3,-B2,B3,C2,-C3,-D2,D3		$(\overline{14}\ \overline{39}\ 91)[36\ 84\ 42]$	

5A	p = 3	3,234	A1,B3,C3	$\overline{\varepsilon}_{23}$ = 0,06 $\overline{\varepsilon}_{13}$ = 0,012	(42 32 85)[58 62 $\overline{52}$]	$\overline{\varepsilon}_{23}$ = 0,52 $\overline{\varepsilon}_{13}$ = 0,12
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,331	A1,-A2,-B2,B3,C3	$\overline{\varepsilon}_{23}$ = 0,01	($\overline{16}$ $\overline{59}$ 79)[92 20 33]	$\overline{\varepsilon}_{23}$ = 0,11
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,374	A1,B3,-C1,C3	$\overline{\varepsilon}_{13}$ = 0,01	(43 22 88)[59 67 $\overline{46}$]	$\overline{\varepsilon}_{13}$ = 0,34
	p = 5	3,481	A1,-A2,-B2,B3,-C1,C3		(54 15 83)[51 72 $\overline{47}$]	
6A	p = 3	3,214	-A3,-B2,B3	$\overline{\varepsilon}_{23}$ =-0,03 $\overline{\varepsilon}_{13}$ =-0,01	(57 $\overline{25}$ 79)[$\overline{16}$ 90 40]	$\overline{\varepsilon}_{23}$ =-0,88 $\overline{\varepsilon}_{13}$ =-0,11
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,345	-A3,-B2,-C3,-D2	$\overline{\varepsilon}_{23}$ =-0,03	(42 $\overline{24}$ 88)[$\overline{20}$ 92 34]	$\overline{\varepsilon}_{23}$ =-0,65
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,686	-A3,-B2,B3,C2	$\overline{\varepsilon}_{13}$ =-0,02	(36 $\overline{27}$ 90)[$\overline{46}$ 78 42]	$\overline{\varepsilon}_{13}$ =-0,24
	p = 5	4,243	A2,-A3,-B2,B3,C2,-C3,-D2,D3		(46 $\overline{18}$ 87)[$\overline{46}$ 79 41]	
7A	p = 3	2,723	-B2,B3,-D2	$\overline{\varepsilon}_{23}$ =-0,08 $\overline{\varepsilon}_{13}$ = 0,03	(28 $\overline{52}$ 80)[$\overline{83}$ 28 48]	$\overline{\varepsilon}_{23}$ =-1,32 $\overline{\varepsilon}_{13}$ = 0,2
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,046	A1,-B2,B3,D1,-D2	$\overline{\varepsilon}_{23}$ =-0,04	(33 $\overline{49}$ 81)[$\overline{74}$ 39 55]	$\overline{\varepsilon}_{23}$ =-1,08
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,380	A1,-A3,B3,D1	$\overline{\varepsilon}_{13}$ =-0,01	(23 $\overline{42}$ 88)[$\overline{83}$ 41 41]	$\overline{\varepsilon}_{13}$ = 0,33
	p = 5	3,381	A1,-A3,-B2,B3,D1,-D2		(21 $\overline{43}$ 88)[$\overline{75}$ 50 43]	
8A	p = 3	2,543	A1,-A3,D1	$\overline{\varepsilon}_{23}$ =-0,04 $\overline{\varepsilon}_{13}$ =-0,02	(57 $\overline{27}$ 77)[$\overline{16}$ 89 42]	$\overline{\varepsilon}_{23}$=-0,8 $\overline{\varepsilon}_{13}$=-0,07
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	2,687	A1,-A3,B1,C1,-C3,D1	$\overline{\varepsilon}_{23}$ =-0,06	(51 $\overline{06}$ 85)[$\overline{15}$ 97 15]	$\overline{\varepsilon}_{23}$=-0,52
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,028	A1,-A3,-B2,D1,-D2	$\overline{\varepsilon}_{13}$ =-0,01	(51 $\overline{14}$ 85)[$\overline{33}$ 87 34]	$\overline{\varepsilon}_{13}$=-0,24
	p = 5	3,081	A1,-A3,B1,-B2,C1,-C3,D1,-D2		(51 $\overline{13}$ 84)[$\overline{41}$ 83 38]	

TABLEAU IX : RESULTATS THEORIQUES DE LA TOLE B

GRAIN	CONDITIONS DE DEFORMATION	INITIAL $\varepsilon = 0,1$			FINAL $\varepsilon = 1$	
		$T_0(\tau \ \delta\varepsilon)$	SYSTEMES DE GLISSEMENT	CISAILLEMENTS	ORIENTATIONS	CISAILLEMENTS
1B	p = 3	3,374	-B3,-C2,-D3	$\bar{\varepsilon}_{23} = 0,015$ $\bar{\varepsilon}_{13} = 0,006$	$(\overline{41}\ 44\ 82)[\overline{54}\ 57\ \overline{57}]$	$\bar{\varepsilon}_{23} = 0,763$ $\bar{\varepsilon}_{13} = 0,081$
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,481	B2,-B3,-C2,-D3	$\bar{\varepsilon}_{23} = 0,01$	$(\overline{40}\ 41\ 84)[\overline{51}\ 62\ \overline{55}]$	$\bar{\varepsilon}_{23} = 0,71$
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,937	B2,-C2,C3,-D3	$\bar{\varepsilon}_{13} = -0,017$	$(22\ 88\ 46)[\overline{63}\ 46\ \overline{58}]$	$\bar{\varepsilon}_{13} = -0,51$
	p = 5	3,949	-A2,A3,B2,-B3,-C2,C3,D2,-D3		$(\overline{21}\ 47\ 87)[\overline{69}\ 55\ \overline{46}]$	
2B	p = 3	3,758	B2,C3,D2	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,028$ $\bar{\varepsilon}_{13} = -0,018$	$(40\ 86\ 34)[\overline{27}\ 46\ \overline{85}]$	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,79$ $\bar{\varepsilon}_{13} = -0,58$
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,882	A3,B2,C3,D2	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,027$	$(\overline{10}\ 92\ 41)[17\ 42\ \overline{89}]$	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,46$
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	4,503	B2,-C2,C3,-D3	$\bar{\varepsilon}_{13} = -0,028$	$(04\ 88\ 50)[\overline{25}\ 49\ \overline{84}]$	$\bar{\varepsilon}_{13} = -1,03$
	p = 5	4,634	-A2,A3,B2,-B3,-C2,C3,D2,-D3		$(38\ 90\ 26)[\overline{52}\ 43\ \overline{74}]$	
3B	p = 3	4,409	B2,C3,D2	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,04$ $\bar{\varepsilon}_{13} = -0,02$	$(37\ 85\ 40)[\overline{38}\ 52\ \overline{76}]$	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,89$ $\bar{\varepsilon}_{13} = -0,57$
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	4,475	A3,B2,C3,D2	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,04$	$(\overline{23}\ 91\ 38)[36\ 44\ \overline{82}]$	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,67$
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	4,764	B2,-C2,C3,-D3	$\bar{\varepsilon}_{13} = -0,033$	$(21\ 44\ 89)[56\ 68\ \overline{46}]$	$\bar{\varepsilon}_{13} = -0,89$
	p = 5	4,840	-A2,A3,B2,-B3,-C2,C3,D2,-D3		$(38\ 94\ 27)[\overline{53}\ 44\ \overline{72}]$	
4B	p = 3	3,295	A3,B2,D2	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,023$ $\bar{\varepsilon}_{13} = -0,005$	$(39\ 82\ 42)[\overline{57}\ 57\ \overline{60}]$	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,73$ $\bar{\varepsilon}_{13} = -0,06$
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,385	A3,B2,-B3,D2	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,022$	$(39\ 84\ 39)[\overline{56}\ 56\ \overline{63}]$	$\bar{\varepsilon}_{23} = -0,70$
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,679	A3,B2,-C2,C3	$\bar{\varepsilon}_{13} = -0,022$	$(25\ 88\ 40)[\overline{65}\ 46\ \overline{62}]$	$\bar{\varepsilon}_{13} = -0,27$
	p = 5	3,865	-A2,A3,B2,-B3,-C2,C3,D2,-D3		$(25\ 88\ 42)[\overline{87}\ 47\ \overline{58}]$	

5B	p = 3	2,873	-C2,D1,-D3	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,041 $\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,007	(59 $\overline{13}$ 80)[$\overline{18}$ 94 29]	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,09 $\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,10
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,018	-B3,C1,-C2,D1,-D3	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,022	(57 $\overline{11}$ 82)[$\overline{16}$ 96 23]	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,21
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,195	-B2,C1,-C2,D1,-D3	$\bar{\varepsilon}_{13}$ = 0,009	($\overline{25}$ 39 89)[$\overline{64}$ 62 $\overline{46}$]	$\bar{\varepsilon}_{13}$ = 0,18
	p = 5	3,366	B2,-B3,C1,-C2,D1,-D3		($\overline{12}$ 55 83)[$\overline{63}$ 60 $\overline{49}$]	
6B	p = 3	3,141	B2,C3,D2	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,002 $\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,01	($\overline{38}$ 81 45)[$\overline{59}$ $\overline{58}$ 54]	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,79 $\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,19
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,282	-B1,B2,-C1,C3,D2	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,04	(54 83 $\overline{19}$)[$\overline{20}$ 34 91]	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,21
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,200	A3,B2,C3,D2	$\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,014	($\overline{24}$ 89 41)[$\overline{65}$ $\overline{45}$ 59]	$\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,243
	p = 5	3,385	-A2,A3,B2,-B3,-C2,C3,D2,-D3		($\overline{22}$ 88 45)[$\overline{65}$ $\overline{47}$ 59]	
7B	p = 3	3,120	A3,B2,D2	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0 $\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,008	(39 81 44)[$\overline{58}$ 57 $\overline{55}$]	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,80 $\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,15
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	3,178	-A1,A3,B2,-D1,D2	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,032	($\overline{48}$ 86 $\overline{17}$)[$\overline{20}$ $\overline{29}$ $\overline{92}$]	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,17
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	3,135	A3,B2,C3,D2	$\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,01	(25 88 40)[$\overline{64}$ 45 $\overline{59}$]	$\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,17
	p = 5	3,306	-A1,A3,B2,-B3,-D1,D2		(25 88 40)[$\overline{67}$ 45 $\overline{56}$]	
8B	p = 3	2,390	B1,-B2,C1,-D2	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,030 $\bar{\varepsilon}_{13}$ = 0,025	($\overline{50}$ 25 84)[$\overline{20}$ 85 $\overline{37}$]	$\bar{\varepsilon}_{23}$ = 0,29 $\bar{\varepsilon}_{13}$ = 0,32
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{23} \neq 0$)	2,477	A1,B1,-B2,C1,D1,-D2	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,02	($\overline{31}$ 02 96)[$\overline{17}$ 93 $\overline{08}$]	$\bar{\varepsilon}_{23}$ =-0,10
	p = 4 ($\delta\varepsilon_{13} \neq 0$)	2,629	A1,B1,-B2,C1,D1,-D2	$\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,023	(40 $\overline{30}$ 90)[$\overline{54}$ 66 42]	$\bar{\varepsilon}_{13}$ =-0,16
	p = 5	2,819	A1,-A3,B1,-B2,C1,-C3,D1,-D2		(31 $\overline{24}$ 93)[$\overline{52}$ 71 37]	

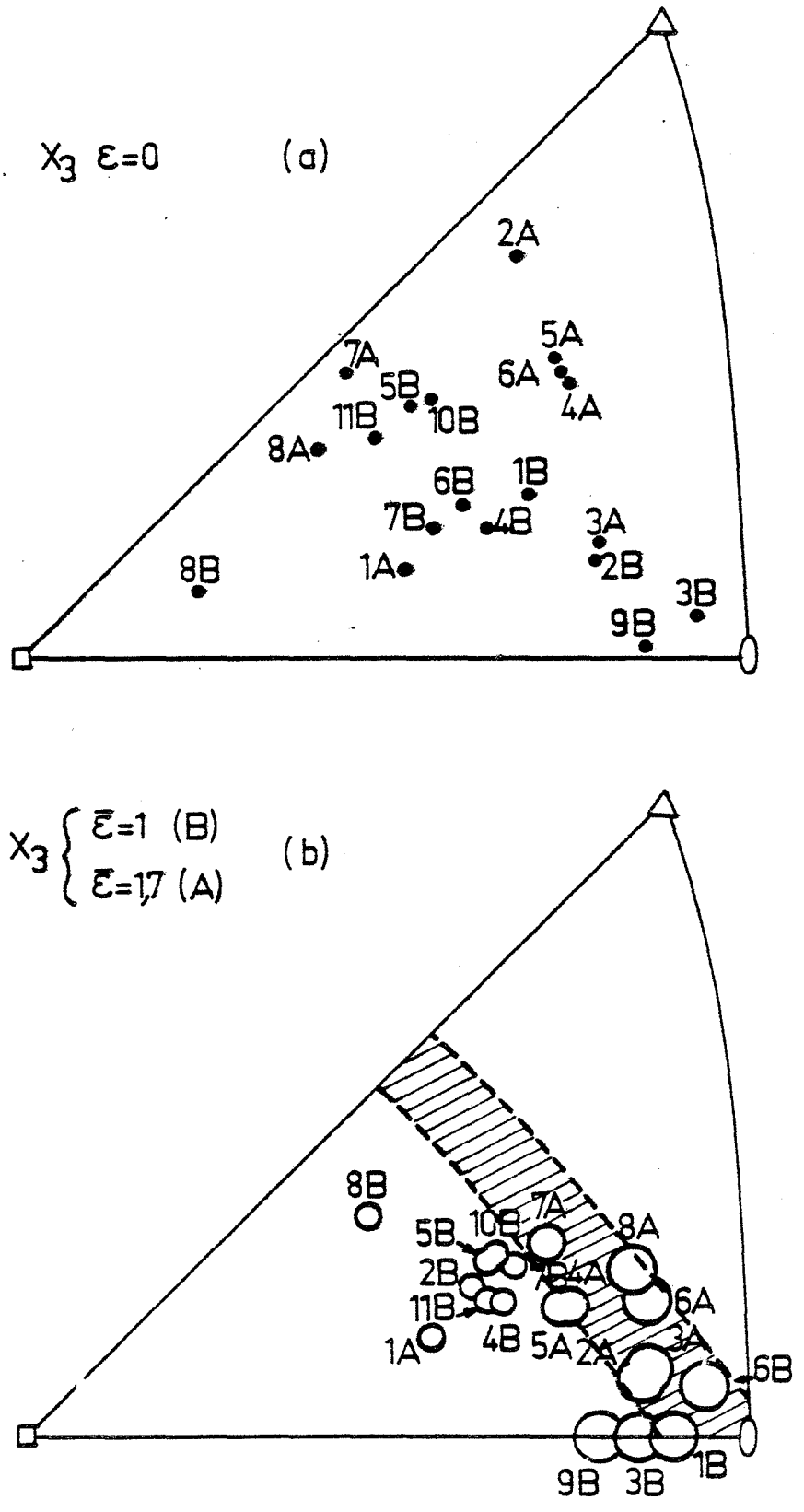


FIGURE 96 - Positions dans un même triangle stéréographique des plans de compression X_3 des différents grains des tôles A et B avant et après laminage.

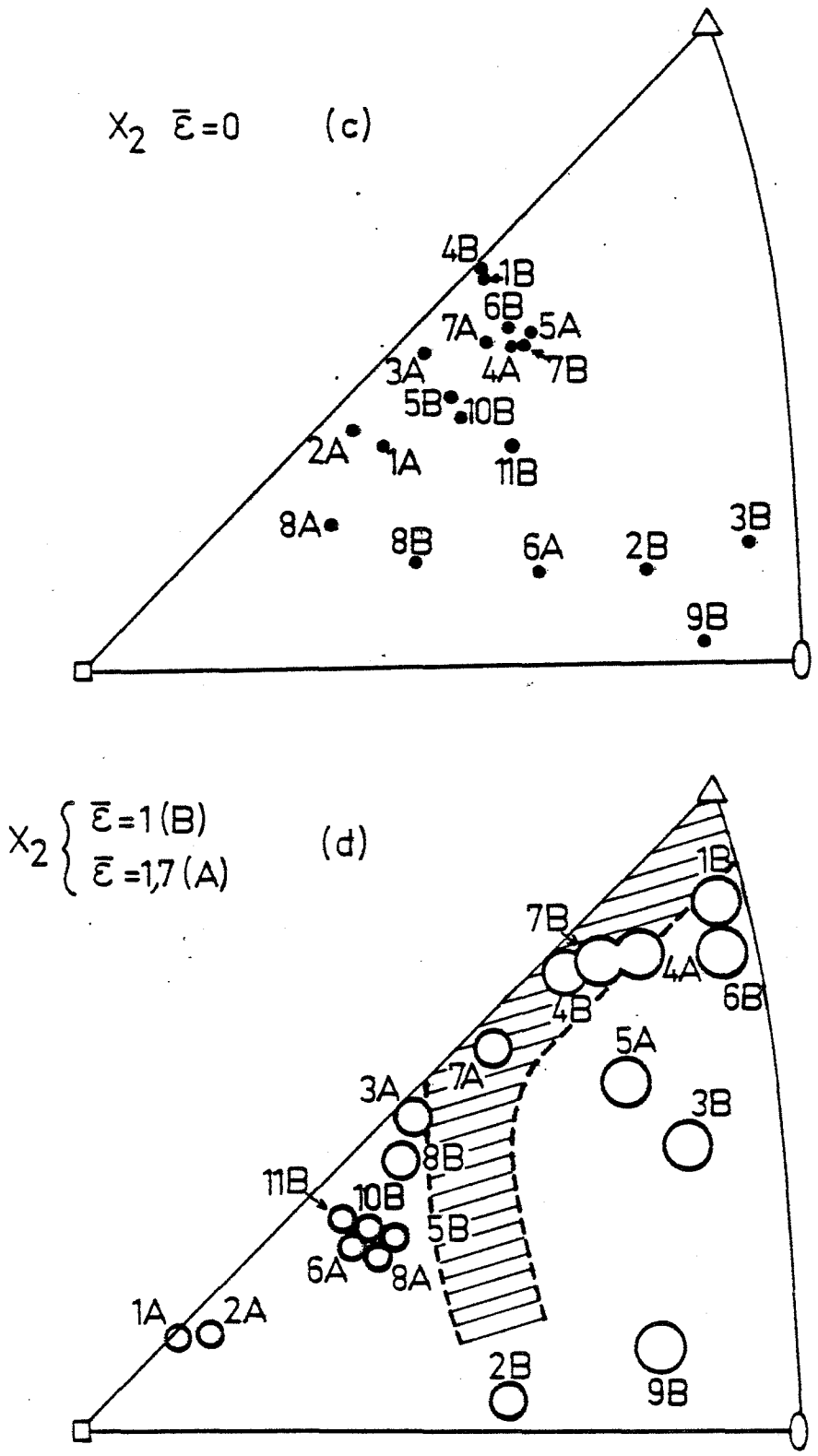


FIGURE 97 - Positions dans un même triangle stéréographique des axes d'allongement X_2 des différents grains des tôles A et B avant et après laminage.

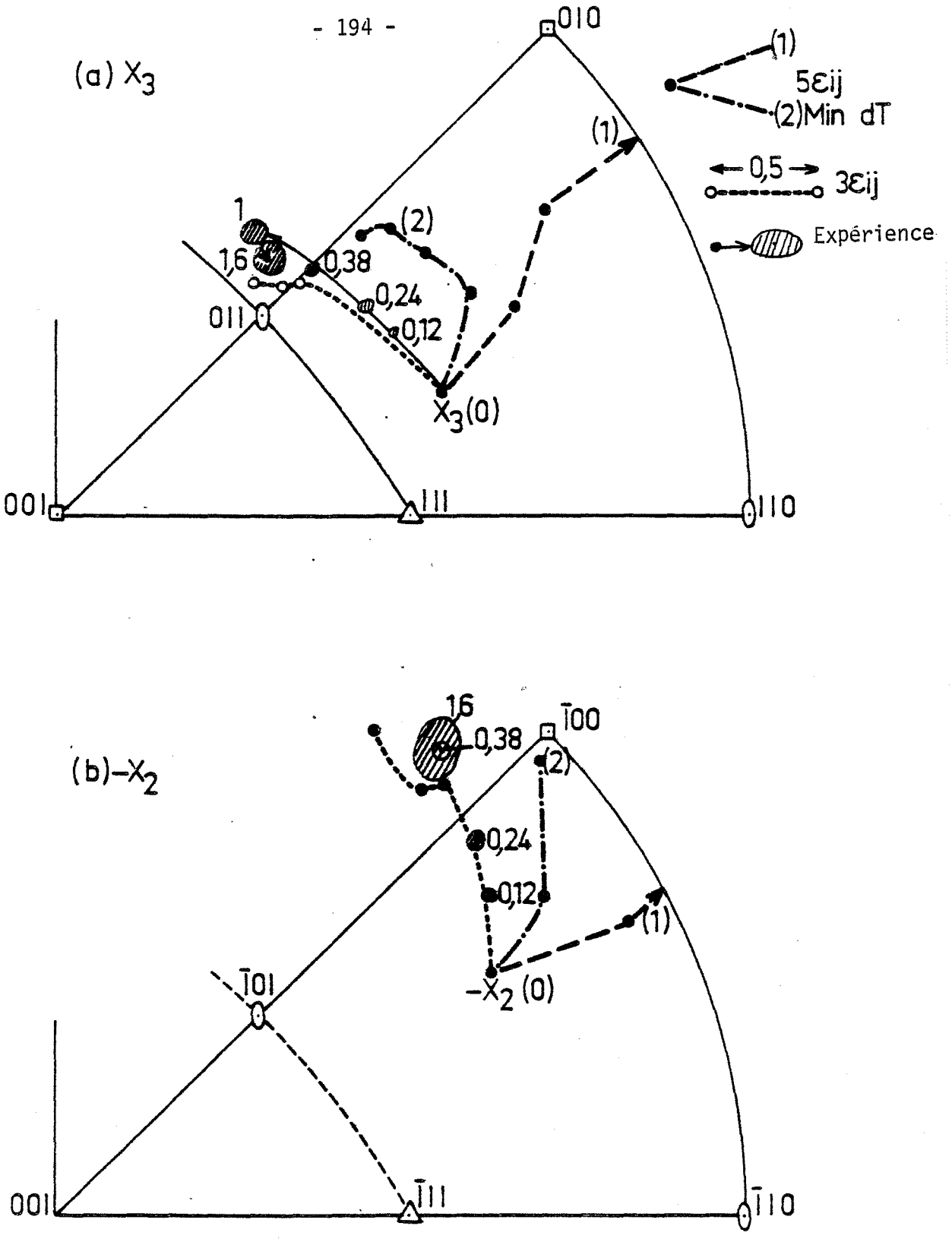


FIGURE 98 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_3 et X_2 du grain 2A

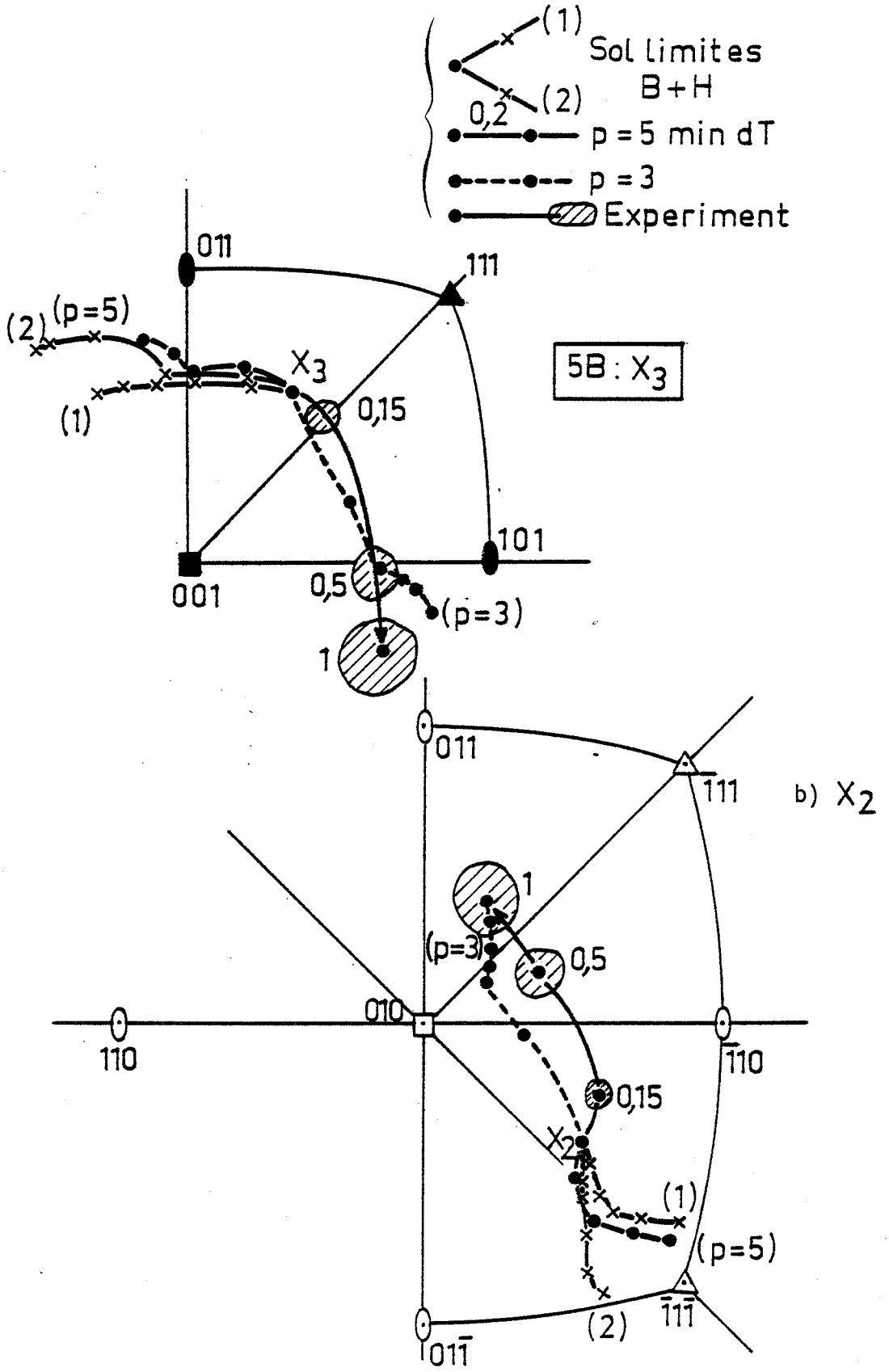


FIGURE 99 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_3 et X_2 du grain 5B.

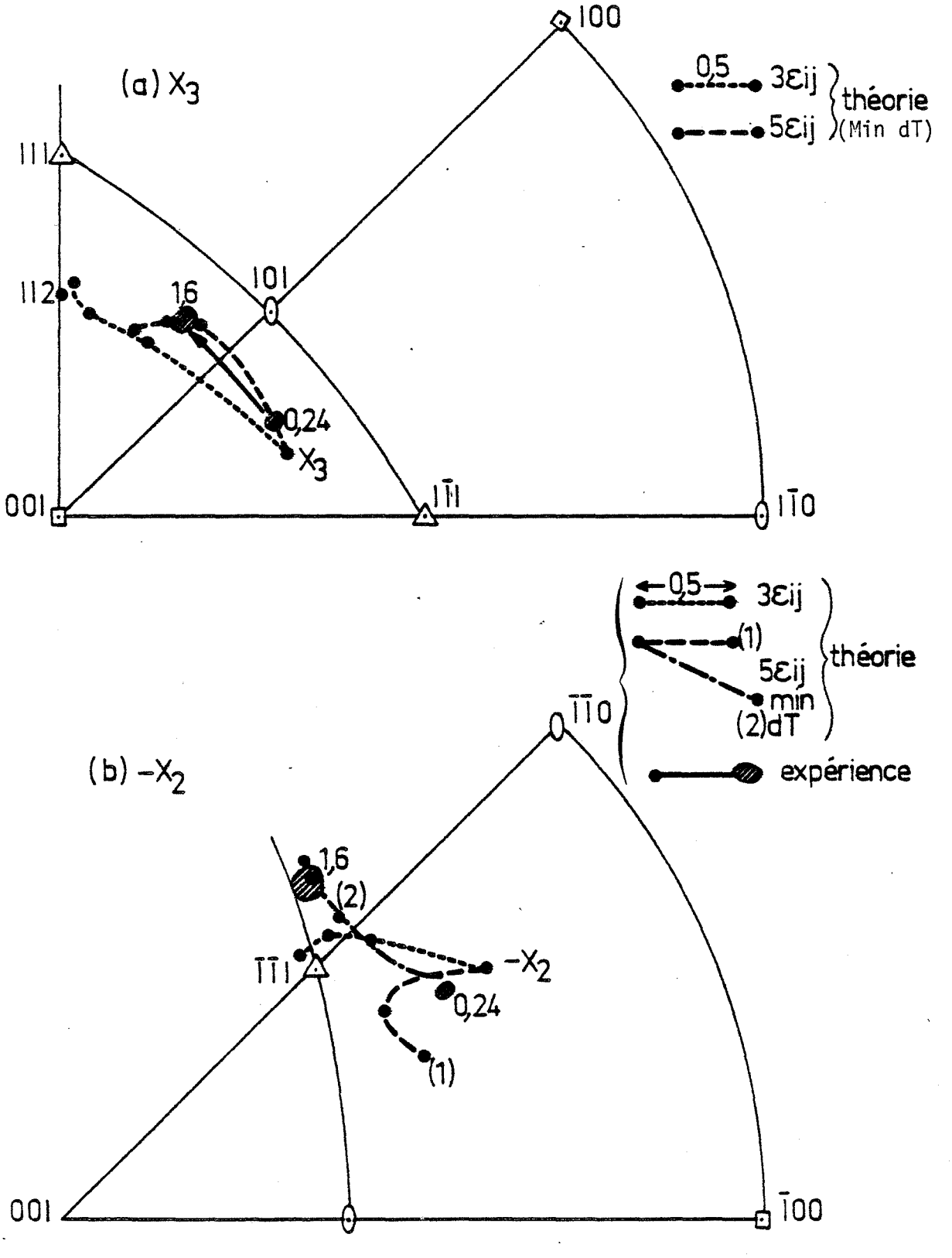


FIGURE 100 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_3 et X_2 du grain 5A.

initiaux très différents. Un bien meilleur accord est obtenu, pour ce grain, par le calcul pour p = 3 (ou p = 4 avec $\delta\varepsilon_{23} \neq 0$) qui prédisent des rotations rapides vers (011) [10 1 $\bar{1}$] *(voir tableau VII)*. Notons que pour ces deux conditions limites de déformation (par exemple p = 3), l'énergie initiale de déformation plastique décroit sensiblement (- 19%) par rapport au cas de la déformation complètement imposée. Notons également que dans ce cas, les deux cisaillements possibles sont relativement faibles.

Si l'on considère les énergies initiales de déformation plastique To de l'ensemble de ce groupe d'orientations *(Tableaux VII et IX)*, nous pouvons faire quelques remarques relatives aux différents grains de ce groupe :

- *Sauf pour le grains 1A, les énergies initiales de la déformation plastique pour 3 $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés sont au moins inférieures de 18% à celles calculées pour 5 $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés.*

- *Pour le grains 1A, l'énergie de déformation plastique pour 3 $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés diminue rapidement à cause de la rotation cristalline au cours du laminage (de 20% pour $\bar{\varepsilon} \simeq 0,1$), alors que celle pour 5 $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés augmente de façon monotone ($\sim$ 4% à $\bar{\varepsilon} = 1$). Bien que l'écart initial entre les énergies pour p = 3 et p = 5 ne soit que de 6%, il est de 20% après une petite déformation, comme pour les autres grains de ce groupe.*

- *Les cisaillements e^*_{23} et e^*_{13} calculés pour le cas p = 3 à $\bar{\varepsilon} = 1$ sont relativement faibles pour tous les grains du groupe sauf pour les grains 6A et 8A ($e^*_{23} \simeq - 0,8$).*

GROUPE 2 (3A, 4A et 5A)

Les rotations des grains observées expérimentalement dans ce groupe sont semblables à celles prévues pour une compression plane pure avec la minimisation de dT selon nos hypothèses de calcul. *La figure 100* représente les trajectoires théoriques et expérimentales des axes X_2 et X_3

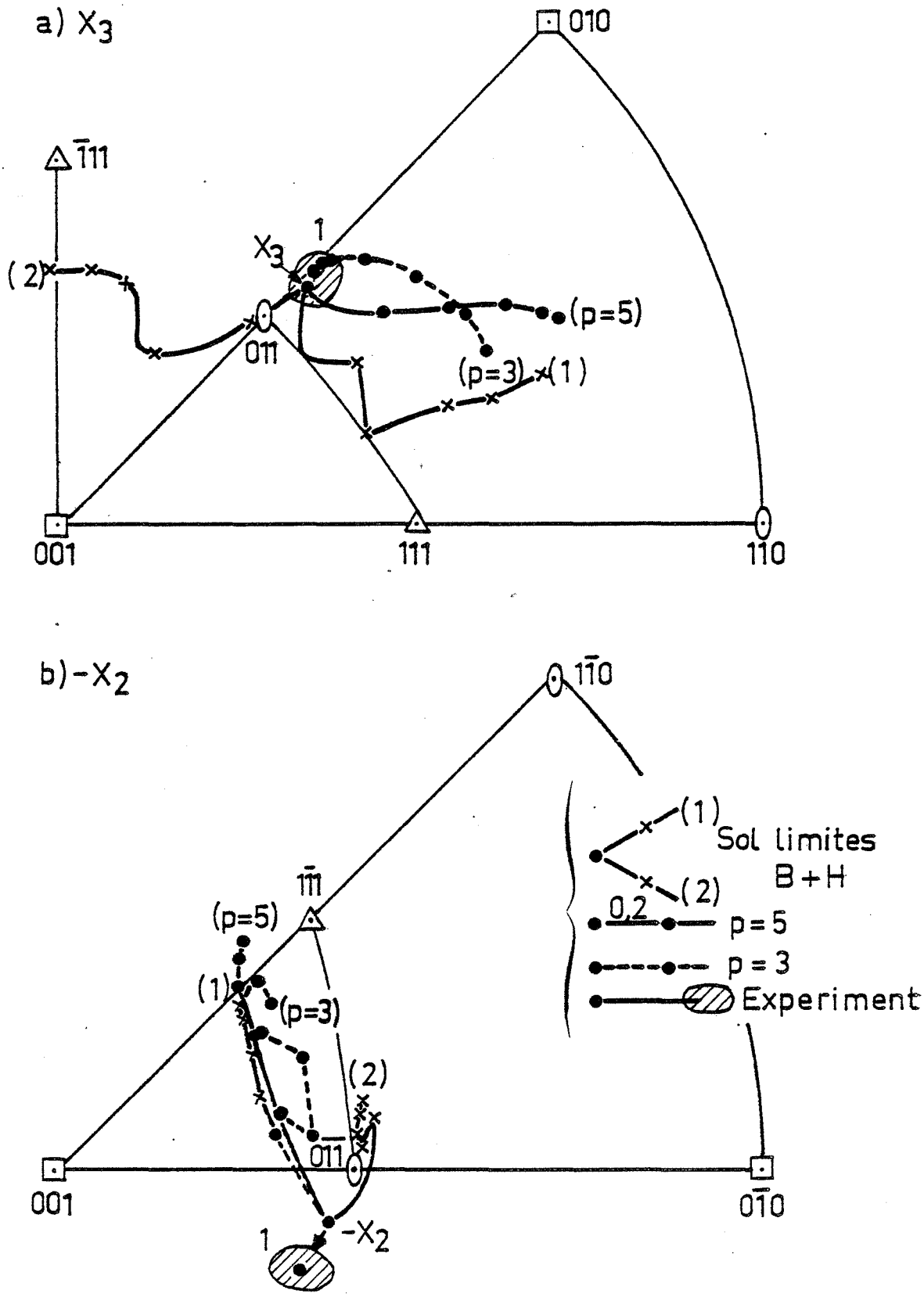


FIGURE 101 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_3 et X_2 du grain 3B.

du grains 5A. Dans ce cas, le calcul avec 3 $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés prévoit une rotation importante vers l'orientation $\sim$ (112) [1 1 $\bar{1}$] tandis que la rotation expérimentale vers (416) [2 3 2] est proche de celle prévue pour le cas de la compression plane parfaitement imposée avec minimisation de dT (branche (2)).

D'après l'ensemble des calculs numériques pour ce groupe, on constate que :

- *L'écart entre les énergies initiales de déformation plastique pour p = 3 et p = 5 est relativement faible : par exemple, il est inférieure à 8% pour les grains 3A et 5A et 14% pour le grain 4A ;*
- *Les cisaillements e^*_{23} et e^*_{13} calculés pour p = 3 à $\bar{\varepsilon}$ = 1 sont relativement forts, surtout en ce qui concerne le cisaillement e^*_{23}.*
- *Quelque soit le mode de déformation choisi, les rotations cristallines du grain 3A sont pratiquement nulles (orientation quasi-stables {011} <1 1 2>).*

GROUPE 3 (7A, 1B, 2B, 3B et 4B)

Ce groupe comporte les orientations dont les modes de déformation ne sont pas très bien définis. Par exemple, pour le grain 7A, tous les calculs numériques (p = 3, 4, 5), prévoient une rotation faible, comme on le constate par l'expérience. La rotation cristalline ne permet pas alors d'indiquer le chemin de déformation de ce grain.

Pour le grain 3B, *(Figure 101)* proche de $\sim$ (011) [0 1 $\bar{1}$], les rotations expérimentales sont faibles (le plan de compression reste proche de (011) et la direction d'allongement tourne légèrement vers [3 6 $\bar{7}$]. Les calculs pour les cas p = 3, 4 et 5 prévoient des rotations importantes et très dispersées, contrairement à l'expérience. Or, il faut rappeler qu'en principe les calculs de minimisation de dT supposent qu'un critère supplémentaire de continuité de glissement est satisfaisant [11]. Dans nos calculs

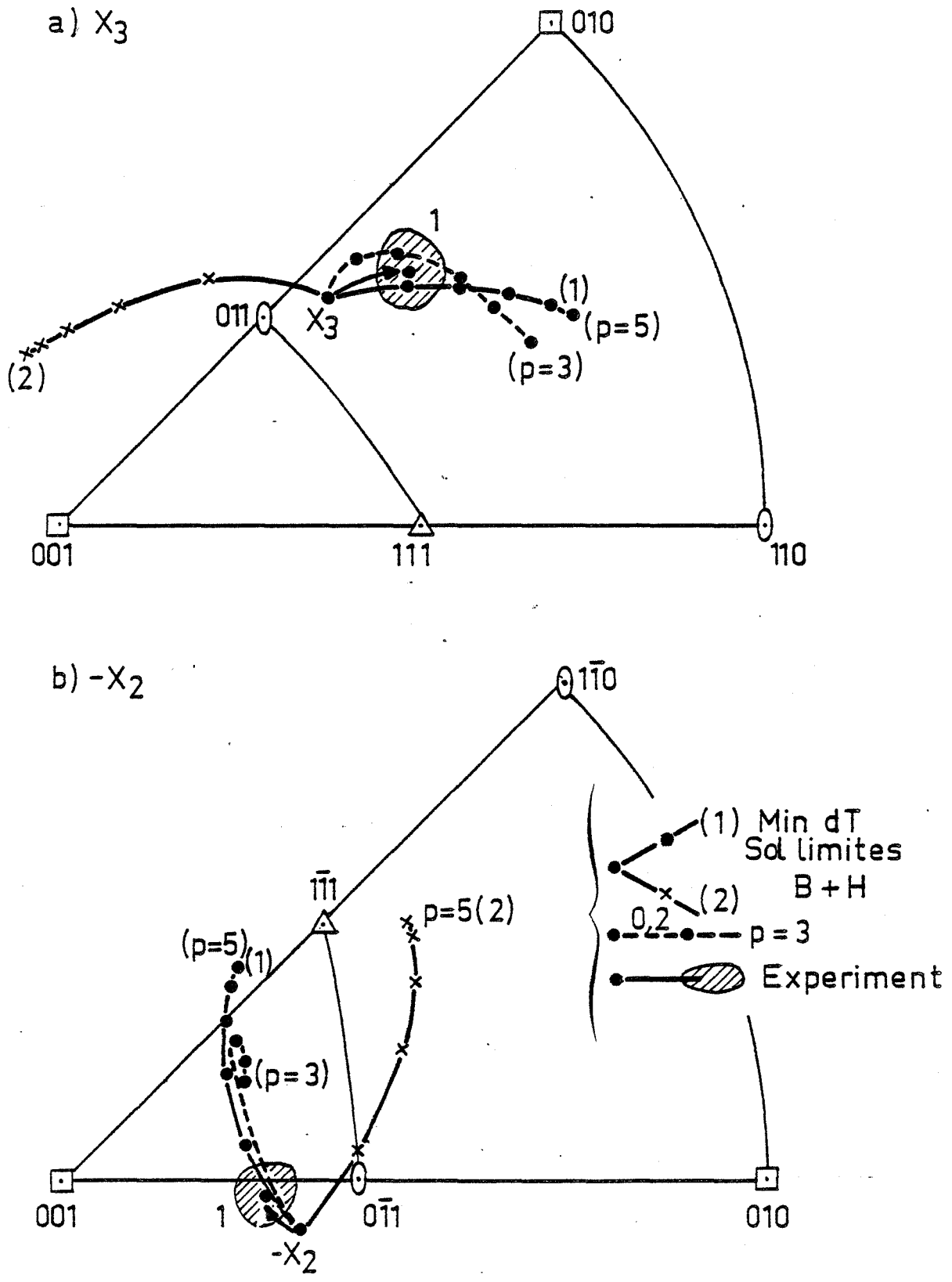


FIGURE 102 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_3 et X_2 du grain 2B.

actuels, ce critère est respecté en général pour les orientations quelconques mais ne l'est pas toujours pour certaines orientations de haute symétrie, notamment pour l'orientation (011) [0 1 $\bar{1}$] [51].

Le problème de cette orientation a été évoqué en détail dans *le chapitre III.1* en compression plane partiellement imposée ; nous y avons constaté un écart important entre le calcul numérique (de minimisation de dT) et l'expérience. En fait, nous avons confirmé que lors des rotations cristallines expérimentales dans la tôle le critère de continuité des glissements est respecté pour le cas p = 5, mais ne l'est pas pour le cas p = 3.

L'orientation 2B *(Figure 102)*, présente une rotation expérimentale faible. Seul le calcul pour le cas où 4 $\delta\varepsilon_{ij}$ sont imposés ($e^*_{23} \neq 0$) prévoit une orientation pratiquement stable, les autres hypothèses prévoient des rotations importantes. Cependant, d'après notre expérience, il est peu fréquent de trouver des orientations qui se comportent comme si quatre termes $\delta\varepsilon_{ij}$ étaient imposés.

Les rotations expérimentales des grains 1B et 4B *(Figures 103 et 104)* sont assez surprenantes. Alors que les orientations initiales sont presque identiques ($\sim$ ($\bar{1}$34) [$\bar{1}$ 2 $\bar{1}$]), les rotations expérimentales sont différentes et dans les 2 cas elles sont plus faibles que prévues. En effet, les grains tournent légèrement vers $\sim$ (011) [1 1 $\bar{1}$] (1B et 6B) ou vers $\sim$ (1$\bar{7}$3) [$\bar{4}$ 5 $\bar{7}$] (4B et 7B) en empruntant certes les chemins théoriques (sauf pour X_3 de 1B) c'est-à-dire vers ($\bar{1}$12) ou ($\bar{1}$13) [$\bar{1}$ 1 $\bar{1}$] mais avec des amplitudes moindres.

IV.5 - Discussion

Les rotations cristallines expérimentales de 19 grains des deux tôles à gros grains ont été comparées aux prédictions théoriques pour différentes conditions limites de déformation des grains :

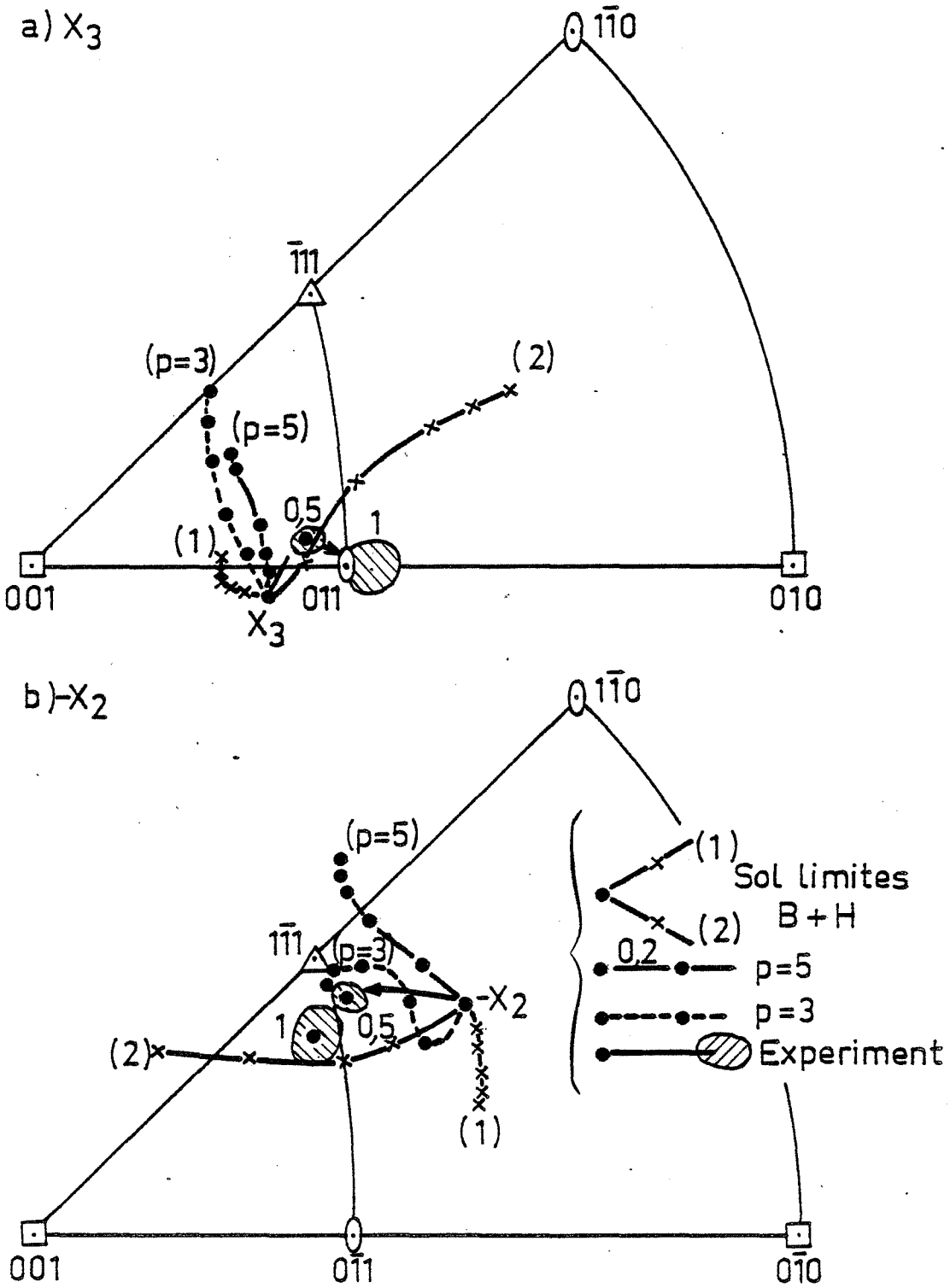


FIGURE 103 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_3 et X_2 du grain 1B.

- *déformation complètement imposée (compression plane pure) ;*
- *déformation partiellement imposée en permettant des cisaillements dans le sens de l'épaisseur (3 $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés avec $\delta\varepsilon_{12} = 0$ et 4 $\delta\varepsilon_{ij}$ imposés avec $\delta\varepsilon_{12} = 0$ et soit $\delta\varepsilon_{13}$ soit $\delta\varepsilon_{23} = 0$).*

Les rotations cristallines de l'ensemble des 19 grains étudiés des deux tôles dont 14 ont des orientations très différentes se partagent en deux types :

- *Celles prévues par une déformation partiellement imposée avec p = 3 (cas de 6 orientations différentes),*
- *Celles prévues par une compression plane pure avec minimisation de dT (3 orientations plus peut être le grain 3B).*

Il reste néanmoins quatre orientations dont le comportement est ambigu ou proche d'un des deux cas : p = 4.

Les orientations cristallines obtenues sur les deux tôles à gros grains après laminage sont proches des composantes importantes de textures de l'aluminium [1] *(Figure 96 et 97)*. Signalons que les textures de l'aluminium ne correspondent pas à une orientation idéale simple (exemple (110) [1 $\bar{1}$ 2], texture dite du laiton) mais à plusieurs orientations idéales comme : {146} <2 1 $\bar{1}$> ; {123} <4 1 $\bar{2}$> et {110} <1 $\bar{1}$ 2> dont l'importance relative varient suivant le taux de laminage [53] *(voir figure 1 du chapitre I)*.

Nos résultats montrent clairement que pour prévoir la formation de textures de laminage, il faut tenir compte des différents modes de déformations possibles pour chaque grain. La proposition de CANOVA, KOCKS et JONAS [33] selon laquelle la déformation des grains est proche de p = 3 quand l'épaisseur X_3 est inférieure d'un facteur d'environ 3 ou 4 aux autres dimensions, est valable pour certains grains mais reste insuffisante. En effet, les formes de nos grains (initialement de l'ordre de 20 x 20 x 2 mm) respectent toujours ce critère, mais une proportion non négligeable des grains (environ le tiers) se déforment en compression plane pure. Cependant, il semble

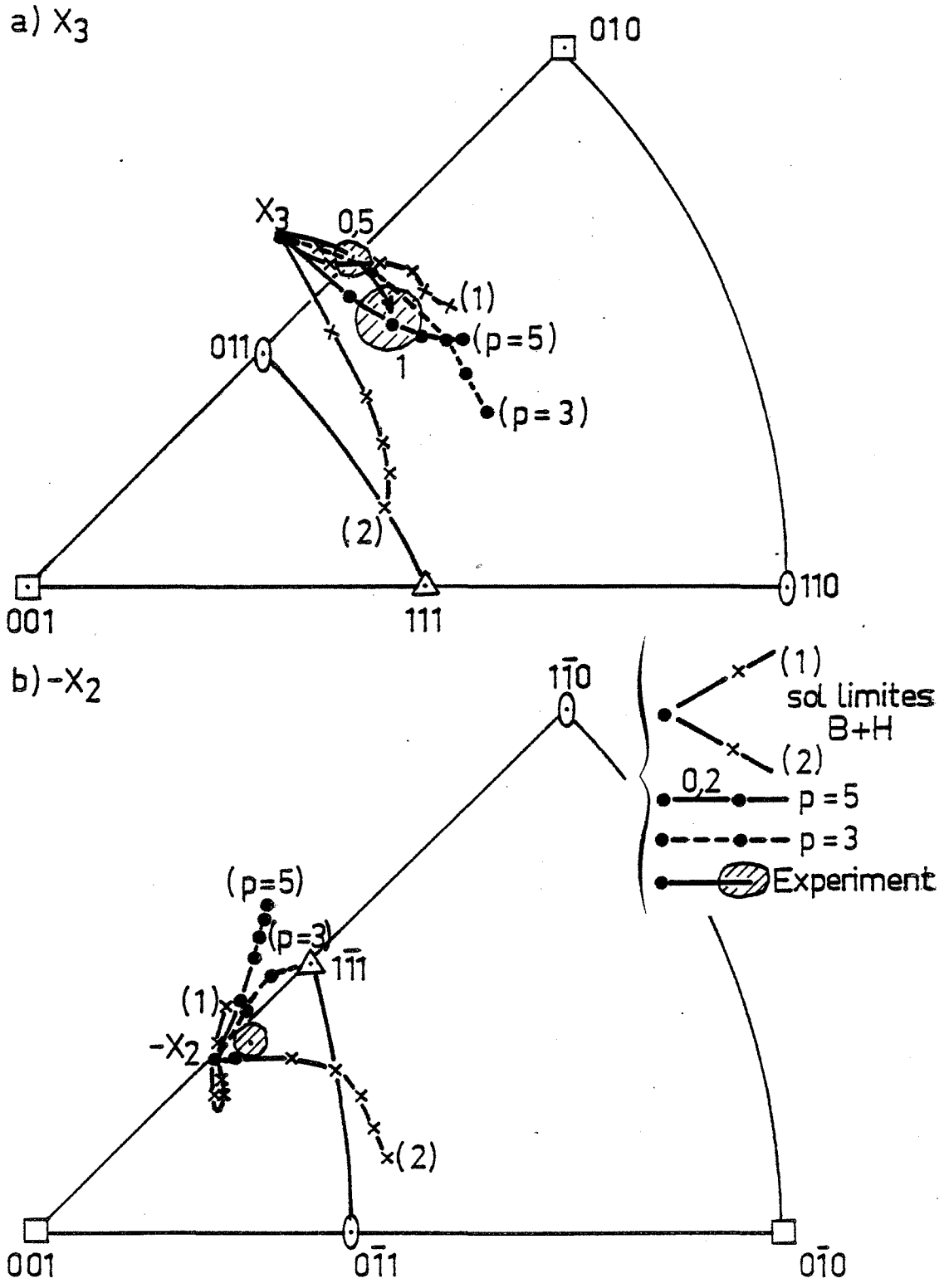


FIGURE 104 - Rotations théoriques et expérimentales des axes X_3 et X_2 du grain 4B.

que pour la moitié environ des grains étudiés, les rotations cristallines correspondent à la proposition de CANOVA et al. Nous avons constaté que le mode de déformation des grains dépend des énergies relatives de déformation plastique. Ceci nous permet de proposer un critère supplémentaire pour le mode de déformation des grains dans une tôle laminée.

Pour qu'un grain dans une tôle laminée se déforme comme si seulement 3 $\delta\varepsilon_{ij}$ lui soient imposés, il faut que, d'une part,

(1) *l'énergie de déformation plastique correspondante soit sensiblement plus faible (d'au moins 15%) que celle pour laquelle la déformation est complètement imposée et que, d'autre part,*

(2) *les cisaillements qui en résultent soient inférieurs à* $\sim 0{,}5\ \delta\varepsilon$.

Ces conditions sont conformes au principe de minimisation du travail de déformation plastique des grains.

Si l'orientation du grain est telle que ses conditions sont impossibles (peu d'écart d'énergie pour p = 3 et p = 5 ou des cisaillements très importants) le grain se déforme généralement en compression plane pure. Dans ce cas le calcul de minimisation de la variation de dT permet de trouver les bonnes solutions pour les rotations des grains.

L'importance de l'influence de l'orientation cristalline des grains sur leur mode de déformation est soulignée par le fait que les grains 5B et 11B, qui ont pratiquement les mêmes orientations initiales mais des tailles et des voisins différents *(Figure 95)*, se comportent de la même façon.

CHAPITRE V

DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Au cours de cette étude nous avons cherché à vérifier les théories de la déformation plastique des cristaux c.f.c. pour des cristaux d'aluminium sollicités sous différentes conditions limites. De plus, il s'agissait de voir comment ces théories pouvaient s'appliquer au cas des grandes déformations auxquelles sont soumis des métaux polycristallins lors des procédés de mise en forme. Rappelons que ces théories devraient permettre de prévoir (i) les rotations cristallines des grains et donc l'évolution des textures de déformation et (i i) les amplitudes des déformations non-imposées, par exemple les cornes d'emboutissage de tôles texturées.

Expérimentalement, pour réaliser l'essai de compression plane sur cristaux, nous avons utilisé un dispositif dérivé de celui de CHIN. Ce dispositif nous a permis d'appliquer et de bien contrôler une déformation macroscopiquement homogène jusqu'à des déformations très importantes($\bar{\varepsilon}>1$). Au cours de la déformation plastique, nous déterminons pour chaque cristal les différents paramètres qui la caractérisent complètement, à savoir :

- *L'énergie de déformation plastique*
- *Les systèmes de glissement à l'état critique*
- *Les déformations non-imposées dans le cas d'une déformation partiellement imposée*
- *Les rotations cristallines.*

Nous avons également entamé un rapprochement entre le comportement du monocristal et celui d'un grain dans un polycristal par une étude du laminage de tôles d'aluminium à gros grains.

Deux modèles de calcul sont utilisés au cours de cette étude pour simuler des déformations importantes de cristaux c.f.c. en compression plane , soit complètement imposées soit partiellement imposées. Les modèles de calcul théoriques sont basés sur des critères d'énergies de déformation plastique : maximisation de l'énergie de déformation du premier ordre (BISHOP et HILL [12, 13], RENOUARD et WINTENBERGER [10]), minimisation de l'énergie du deuxième ordre (RENOUARD et WINTENBERGER [34]), *(c.f. Chapitres I et II)*. Rappelons que nous n'avons considéré que la déformation par glissement sur les plans du type {111} et dans les directions <110> (en faisant abstraction du maclage). Des programmes de calcul sur ordinateur ont été mis au point pour simuler une déformation rationnelle importante pouvant atteindre $\bar{\varepsilon} = 1{,}7$.

Pour lever l'indétermination des amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$, lorsque le nombre n de systèmes à l'état critique est supérieur aux p termes imposés de la déformation, nous avons utilisé l'hypothèse de RENOUARD et WINTENBERGER : la solution réelle pour les $\delta\gamma^l$ rend minimale l'énergie de déformation plastique de second ordre. En outre, pour les calculs numériques sur ordinateur, nous avons émis deux hypothèse supplémentaires :

(*i*) *la consolidation* $d\tau_c^l$ *de chaque système est identique pour tous les systèmes* ($d\tau_c^l$ = *cste*) *et donc n'influe pas sur la minimisation.*

(*ii*) *ce sont les mêmes systèmes de glissement qui restent à l'état critique dans chaque incrément de déformation qu'on impose pour le calcul. Ceci revient à supposer que le critère de continuité de glissement (de RENOUARD et WINTENBERGER) est toujours respecté.*

La validité de ces hypothèses sera évaluée lors de la discussion des résultats expérimentaux.

Les prévisions théoriques de ces modèles sont comparées aux résultats expérimentaux obtenus sur plusieurs éprouvettes d'aluminium monocristallines de différentes orientations, déformées en compression plane dans les deux conditions suivantes [37] :

- *Conditions mixtes (contraintes et déformations imposées) à l'aide de monocristaux libres*

- *Déformation complètement imposée à l'aide des tricristaux incomptabibles (monocristal encastré entre deux autres cristaux d'orientation symétrique).*

Conditions mixtes.

Pour le cas de monocristaux déformés en conditions mixtes, nous avons déterminé les états de contraintes par la méthode dite du polyèdre critique avec le critère de travail maximal des forces extérieures non-imposées. D'après l'ensemble de nos résultats sur monocristaux (d'orientations diverses), il apparait clairement que cette méthode donne des résultats très satisfaisants pour les systèmes à l'état critique. Rappelons qu'un système l est à l'état critique lorsque sa cission réduite τ atteint sa valeur critique τ_c. Les plans de glissement observés par une microscopie optique correspondent en général aux systèmes prévus. Toutefois, les systèmes de glissement sur lesquels les amplitudes devraient être relativement faibles ($< 0{,}5\ \delta\varepsilon$) sont, dans la plupart des cas, difficiles à observer par cette technique.

En ce qui concerne les valeurs relatives de l'énergie $\sigma^*_{33}\ \delta\varepsilon$, les courbes expérimentales contrainte - déformation $\sigma_{33}\ (\overline{\varepsilon})$ des différentes orientations se classent, en général, dans l'ordre prévu par le calcul des énergies de déformation plastique. Le cas des orientations proches de (110) <112> est particulier *(Figure 45)*. En effet, leur déformation nécessite des contraintes nettement plus faibles que pour des orientations testées de même énergie de déformation plastique.

Si la valeur de la cission critique τ_c est sensiblement identique sur chaque système de glissement (hypothèse de l'écrouissage isotrope), les courbes $\tau_c\ (\Sigma\delta\gamma^l)$ devraient être confondues. Nos courbes $\tau_c\ (\Sigma\delta\gamma^l)$ *(Figure 75)* présentent une dispersion des cissions critiques de l'ordre de ± 10%, abstraction faite des orientations (110) <001> et (110) <112>. Il faut signaler que ces courbes sont établies avec les valeurs de l'énergie $\delta T\ (= M\tau_c\ \delta\varepsilon)$ corrigées pour l'évolution de l'orientation des cristaux après de grandes déformations plastiques. Si l'on ne tient pas compte de cette évolution, en prenant comme HOSFORD [17] $\tau_c = \dfrac{\sigma_{33}}{M_o}$ et $\Sigma\delta\gamma^l = M_o\ \overline{\varepsilon}$, nos courbes présentent une dispersion beaucoup plus importante avec des valeurs moyennes de τ_c légèrement plus faibles. Cette dernière remarque explique la petite différence constatée

entre nos courbes et celles obtenues par HOSFORD *(Figure 7 du chapitre I)*. En ce qui concerne les deux orientations (110) <001> et (110) <112>, les valeurs de τ_c sont soit élevées ((110) <001>) soit faibles ((110) <112>). Soulignons que notre courbe τ_c ($\Sigma\delta\gamma^l$) pour (110) <112> est en accord avec les courbes publiées par CHANDRA [47] et HOSFORD [17]. Par contre ces auteurs n'ont pas étudié le cas (110)<001>. Ce comportement pourrait s'expliquer par le nombre de systèmes actifs ; 4 pour l'orientation "dure" (110) <001>, 3 pour les orientations quelconques et 2 pour l'orientation "molle" (110)<112>. Mise à part ces deux cas particuliers l'ensemble de nos résultats montrent qu'en première approximation, l'hypothèse d'un écrouissage isotrope est raisonnable, du moins pour l'aluminium. De plus, le critère de sélection des systèmes actifs, que nous avons souvent adoptés $\tau \geq 0{,}9\ \tau_c$, permet peut-être de tenir compte d'un éventuel écrouissage anisotrope.

L'application de la méthode des conditions mixtes à la compression plane partiellement imposée permet donc de déterminer l'état des contraintes, l'énergie de déformation plastique et les systèmes de glissement à l'état critique avec une précision très satisfaisante. Pour la plupart des orientations de faible symétrie, trois systèmes seulement sont à l'état critique $\tau^l = \tau_c^l$. A l'aide des 3 relations $\bar{e}_{ij} = \sum_l \delta\gamma^l\ M_{ij}^l$, on peut calculer les amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$. Par conséquent la rotation r_i et les déformations non-imposées e_{ij}^* qui caractérisent complètement la déformation sont déterminés. Il n'y a pas de problème d'indétermination.

Cependant, pour certaines orientations, on trouve des systèmes de glissement autres que ceux théoriquement à l'état critique et dont la cission résolue est très proche de τ_c. Il suffit parfois d'une petite rotation cristalline pour amener ces systèmes "quasi-critiques" à l'état critique et ainsi changer brusquement les amplitudes de glissement $\delta\gamma^k$ et la rotation cristalline. Compte-tenu de l'état de contrainte réel dans l'échantillon, il nous semble plus réaliste, pour ces cas, de tenir compte de tous les systèmes proches de l'état critique par exemple en fixant le critère de sélection des systèmes susceptibles de glisser à $\tau^k \geq 0{,}9\ \tau_c^k$. Pour ces cas, la minimisation de l'énergie de second ordre dT permet de déterminer les valeurs des amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$, les déformations non imposées e_{12}^* et e_{23}^* et les rotations cristallines quelque soit le nombre de systèmes sélectionnés. En général, on constate que les amplitudes de glissement ainsi calculées pour les systèmes "quasi-critiques" sont relativement faibles. Cette méthode de calcul diminue sensiblement les "changements de

cap" des orientations théoriques mais ne change pas leurs trajectoires moyennes. Ceci a l'avantage de donner des trajectoires théoriques moins accidentées.

Pour la plupart des orientations, l'accord entre les résultats expérimentaux et théoriques est très raisonnable, aussi bien pour les cas sans indétermination que pour les cas indéterminés avec application de la minimisation de dT. En général, les rotations théoriques ainsi que leurs amplitudes vont bien dans le sens prévu. Il en est de même pour les valeurs et les signes des cisaillements e^*_{12} et e^*_{23}. Néanmoins, pour certaines orientations de haute symétrie du type (110) [$\bar{1}$ 1 0] ou (001) [0 1 0], le calcul numérique actuel de minimisation de dT est insuffisant. En effet, pour les orientations du type (110) [$\bar{1}$ 1 0] il faudra tenir compte, lors de la minimisation numérique de dT sur ordinateur, du critère de continuité des glissements, critère non respecté à présent par notre calcul pour ce type d'orientations. D'autre part, pour les orientations proches de (001) [0 1 0], la déformation devient rapidement inhomogène. Il faudra alors tenir compte des interactions entre les dislocations sur les différents systèmes possibles qui favorisent, semble-t-il, la formation de joints de "grains" d'orientations particulières.

Les résultats expérimentaux obtenus sur deux monocristaux d'un acier inoxydable austénitique sont aussi en très bon accord avec les prévisions pour les rotations, les systèmes de glissement et les cisaillements calculés de la même façon que pour les monocristaux d'aluminium. Ceci montre bien que notre méthode de calcul est valable pour des métaux c.f.c. de compositions chimiques différentes, à condition que la déformation ait lieu de manière homogène, par glissement cristallographique, et sans maclage.

L'originalité de cette partie de nos travaux réside dans l'étude théorique et expérimentale du comportement <u>global</u> d'un cristal (systèmes de glissement, cisaillements et rotations) soumis à une grande déformation partiellement imposée. Les études antérieures sur la compression plane de monocristaux d'aluminium étaient limitées soit aux petites déformations sans calcul correct de l'état des contraintes, HOSFORD [17], soit à seulement deux orientations différentes, CHANDRA [47], sans calcul pour des grandes déformations. Enfin, il faut souligner que lorsque la comparaison est possible, nos résultats sont en accord avec ceux obtenus par ces auteurs.

Compression plane pure.

Dans le cas d'une déformation complètement imposée à un cristal d'orientation quelconque, six ou huit systèmes sont à l'état critique ; il y a donc toujours une indétermination des $\delta\gamma^l$. Or le degré de cette indétermination est très sensible à l'orientation du cristal. Pour étudier ce problème sur le plan expérimental, nous avons mis au point une technique originale d'encastrement qui permet, pour la première fois, d'imposer une déformation homogène importante. Rappelons que les composantes non imposées du tenseur de contraintes sont calculées, en général sans indétermination, par la méthode du travail plastique maximal. Les systèmes de glissement à l'état critique sont alors relevés directement dans le tableau de BISHOP [14]. En principe, la contrainte hydrostatique n'influe pas sur le travail plastique. Pour nos calculs, nous l'avons prise de telle sorte que la contrainte d'écoulement σ^*_{22} soit nulle. En effet, on pense que, physiquement, le cristal central et les cristaux d'encastrement doivent l'annuler lors de la déformation de l'ensemble. Signalons que, pour des déformations parfaitement imposées, la cission résolue est nulle sur tous les systèmes qui ne sont pas à l'état critique. De ce fait, et contrairement au cas de la déformation en conditions mixtes, le critère de continuité des glissements est toujours respecté.

Dans ce cas, pour un cristal d'orientation quelconque, notre méthode de calcul des amplitudes de glissement $\delta\gamma^l$ par minimisation numérique de dT permet de lever l'indétermination des valeurs de $\delta\gamma^l$ et de trouver sans problème la solution réelle pour la rotation du réseau cristallin. Dans le cas d'une indétermination de la rotation d'ordre 1, la solution qui rend dT minimal correspond à une des deux solutions limites de BISHOP et HILL. Lorsque l'indétermination est d'ordre 3, la solution qui minimise dT correspond également à une solution limite de BISHOP et HILL à cinq systèmes de glissement actifs. Notons que cette solution correspond souvent mais pas toujours, avec l'une de nos 2 solutions "extrêmes" qui rendent maximal l'écart entre les orientations possibles.

A notre connaissance, ce travail est la première étude systématique des systèmes de glissement et des rotations cristallines d'un cristal d'orientation quelconque, lorsque toutes les composantes du tenseur des déformations plastiques sont imposées.

La confrontation, pour huit orientations différentes (trois orientations stables et cinq instables), a permis de confirmer d'une part les théories de TAYLOR et de BISHOP et HILL basées sur les énergies de déformation plastique du premier ordre, et d'autre part la nouvelle méthode de RENOUARD et WINTENBERGER basée sur les énergies du deuxième ordre.

Cet accord nous a permis d'étendre l'application de ces théories au problème de la prévision des textures de laminage de matériaux polycristallins. Nous rappelons ici que le problème essentiel reste la définition du mode de déformation des grains dans l'agrégat polycristallin. Nous avons considéré plusieurs hypothèses : celle de TAYLOR [7] (5 termes du tenseur de déformation sont imposés), celle de HONNEFF et MECKING [25] (3 termes de la déformation imposés) et le cas intermédiaire de 4 termes de la déformation imposés. Pour le cas du laminage d'une tôle mince d'aluminium à très gros grains, l'hypothèse de HONNEFF et MECKING selon laquelle les grains doivent se déformer en compression plane partiellement imposée a été confirmée en partie. En effet, 60% environ des grains des tôles étudiées adoptent les rotations cristallines correspondant à celles d'une compression plane partiellement imposée (avec 3 composantes indépendantes de la déformation imposées). Pour les autres grains, les rotations correspondent à celles calculées soit pour une compression plane pure (selon l'hypothèse de TAYLOR), soit, très exceptionnellement, pour une compression plane à 4 termes de déformation imposés.

Suivant l'orientation des grains, le mode de déformation observé est corrélé à l'énergie de déformation plastique et à l'importance des cisaillements possibles, ce qui permet de proposer un critère simple pour le comportement des grains dans une tôle laminée. Il semble qu'un grain plat dans une tôle laminée se déforme en compression plane partiellement imposée (avec 2 cisaillements non imposés) si (1) l'énergie de déformation plastique correspondante est sensiblement plus faible (au moins 15%) que celle de la compression plane pure, et (2) les cisaillements qui en résultent sont relativement faibles.

L'ensemble des résultats exposés concernant la déformation complètement ou partiellement imposée de cristaux d'aluminium permet de fournir des bases solides, à la fois théoriques et expérimentales, pour la prévi-

sion des déformations plastiques anisotropes des métaux ainsi que pour la formation des textures au cours d'une grande déformation plastique.

Nous pensons que ce travail pourrait être utilement poursuivi sur le plan expérimental, notamment par :

(*i*) *des essais sur d'autres cristaux pour lesquels l'indétermination des amplitudes de glissement est importante,*

(*ii*) *la vérification pour d'autres métaux c.f.c. et éventuellement c.c., de la validité des critères énergétiques que nous avons utilisés et qui semblent être valables pour l'aluminium,*

(*iii*) *l'étude de l'influence de la taille des grains sur leur mode de déformation dans une tôle laminée.*

Sur le plan théorique, nos méthodes de calcul pourraient également être affinées par :

(*i*) *l'introduction d'un terme énergétique qui tient compte d'une consolidation anisotrope des systèmes de glissement,*

(*ii*) *l'extension de notre analyse au problème des inhomogénéités de la déformation qui se traduit par la déformation de bandes dans la direction d'allongement,*

(*iii*) *la prise en compte du critère de continuité de glissement pour les orientations de haute symétrie en conditions mixtes.*

Les résultats satisfaisants obtenus sur cristaux en compression plane suggèrent d'autres applications de ces théories, par exemple la prévision des déformations non-imposées lors de l'emboutissage de métaux texturés.

Par la suite, il serait intéressant de compléter notre approche essentiellement mécanique par une approche plus physique pour essayer de donner une interprètation aux phénomènes liés aux intéractions particulières entre les systèmes de glissement (hétérogénéité de la déformation, orientations de haute symétrie ...).

B I B L I O G R A P H I E

[1] - P. COULOMB,
"Les textures dans les métaux de réseau cubique" Ed. DUNOD, Paris, 1972, 97-104.

[2] - G. SACHS,
Z. Ver. Deut. Ing., 72, 1928, 734.

[3] - U.F. KOCKS,
Met. Trans., 1, 1970, 1121-1143.

[4] - T. LEFFERS,
"Deformation of polycrystals : Mechanisms and Microstructures", Ed. HANSEN (N.), HORWELL (A.), LEFFERS (T.), LILHOHT (H.), RISO National Laboratory (Denmark), 1981, 55-71.

[5] - T. LEFFERS,
Phys. Stat. Sol., 25, 1968, 337-344.

[6] - I.L. DILLAMORE, H. KATOH,
Métal. Science, 8, 1974, 21-27.

[7] - G.I. TAYLOR,
J. Inst. Met., 62, 1938, 307-324.

[8] - R. VON MISES,
Z. Angew. Math. Mech., 8, 1928, 161-187.

[9] - C. GOUX,
Mem. Sci. Rev. Met., 72, 1975, 693-703.

[10] - M. RENOUARD et M. WINTENBERGER,
C. R. Acad. Sci., 283B, 1976, 237-240.

[11] - M. RENOUARD et M. WINTENBERGER,
C. R. Acad. Sci., 290B, 1980, 403-406.

[12] - J.F.W. BISHOP et R. HILL,
Phil. Mag., 42, 1951, 414-427.

[13] - J.F.W. BISHOP et R. HILL,
Phil. Mag., 42, 1951, 1298-1307.

[14] - J.F.W. BISHOP,
Phil. Mag. 44, 1953, 51-64.

[15] - G.Y. CHIN et W.L. MAMMEL,
Trans. Met. Soc. AIME, 245, 1969, 1211.

[16] - G.Y. CHIN, E.A. NESBITT, J.A. WILLIAMS,
Acta Met., 14, 1966, 467-476.

[17] - W.F. HOSFORD,
Acta Met., 14, 1966, 1085-1094.

[18] - C. GOUX,
Communication personnelle.

[19] - R. FORTUNIER,
Rapport de fin d'étude (3ème année), E.M.S.E., 1983.

[20] - J.S. KALLEND et G.J. DAVIES,
Phil. Mag., 25, N°2, 1972, 471-490.

[21] - P. VAN HOUTTE et E. ARNOUDT,
Z. Metallk, 66, 1975, 203.

[22] - J. GIL SEVILLANO, P. VAN HOUTTE, E. ARNOUDT,
Z. Metallk, 66, 1975, 367.

[23] - M. WINTENBERGER,
Communication privée.

[24] - G.E.G. TUCKER,
Acta Met., Vol. 9, 1961, 275-186.

[25] - M. HONNEFF et H. MECKING,
"Textures of Materials", Ed. GOTTSTEIN (G.) et LUCKE (K.), Springer, 1978, 265-275.

[26] - P. VAN HOUTTE et E. ARNOUDT,
Mat. Sci. Eng. 23, 1976, 11.

[27] - E. KRONER
Acta Met., 9, 1961, 155.

[28] - J. ZARKA,
Journal de Mécanique, 12,N°2, 1973, 275.

[29] - M. BERVEILLER et A. ZAOUI,
Proc. 4th Int. Conf. on the Strength of Metals and Alloys, Nancy, 1976, 136.

[30] - M. BERVEILLER, A. HIHI et A. ZAOUI
"Deformation of polycrystals : Mechanisms and Microstructures", Ed. HANSEN (N.), HORWELL (A.), LEFFERS (T.), LILHOHT (H.), RISO National Laboratory (Denmark), 1981, 145-156.

[31] - P. MACHETO,
Thèse de docteur-ingénieur, Université Paris-Sud, 1982.

[32] - P. VAN HOUTTE,
Met. Sci. and Eng., 55, 1982, 69-77.

[33] - G.A. CANOVA, U.F. KOCKS and J.J. JONAS,
Acta Met., vol. 32, N°2, 1984, 211-226.

[34] - M. RENOUARD et M. WINTENBERGER,
C. R. Acad. Sci., 292 Série II, 1981, 385-388.

[35] - K. S. HAVNER,
Proc. Roy. Soc. Lond. A378, 1981, 329-349.

[36] - P. FRANCIOSI et A. ZAOUI,
Acta Met., 30, 1982, 1627-1637.

[37] - J.H. DRIVER, A. SKALLI et M. WINTENBERGER,
Phil. Mag., 1984.

[38] - B.C. WONSIEWICZ et G.Y. CHIN,
Met. Trans., 1, 1970, 2715,

[39] - S.P. AGRAWAL et W.F. HOSFORD,
Met. Trans. 7A, 1976, 1867.

[40] - U.F. KOCKS, H. CHANDRA,
Acta Met. 30, 1982, 695-709.

[41] - J.J. SERPOUL,
DEA de Métallurgie, E.M.S.E. - I.N.P.G., 1978.

[42] - J.H. DRIVER, A. SKALLI,
Rev. Phys. Appl., 17, 1982, 447-451.

[43] - R. FLETCHER,
J. Inst. Maths. Applics., 7, 1971, 76-91.

[44] - R. FLETCHER,
"A general quadratic programming algorithm", Rapport TP 401, Atomic Energy Research Establishment, Harwell, 1970.

[45] - R. FLETCHER and M.J.D. POWEL,
Computer J., 6, 1963, 163-168.

[46] - R. FLETCHER,
"Practical methods of optimization", JOHNWILEY and SONS, New-York, vol. 1 et 2, 1980.

[47] - H. CHANDRA,
Thèse Ph. D., Mc Master University, 1979.

[48] - G.Y. CHIN, R.N. THURSTON, E.A. NESBITT,
Trans. Met. Soc., AIME, 236, 1966, 69.

[49] - U.F. KOCKS, G.R. CANOVA,
Deformation of polycrystals : Mechanisms and Microstructures", Ed. HANSEN (N.), HORWELL (A.), LEFFERS (T.), LILHOLT (H.), RISO National Laboratory, 1981, 35-44.

[50] - J.H. DRIVER, M. WINTENBERGER,
Rapport DGRST, Contrats N° 78-7-2398 et 2399, Juillet 1980.

[51] - A. SKALLI, J.H. DRIVER, M. WINTENBERGER,
Mem. Sci. Rev. Met., Juin 1983, 293-302.

[52] - J.H. DRIVER, A. SKALLI et M. WINTENBERGER,
Mem. Sci. Rev. Met., Mai 1983, 241-244.

[53] - H. HELLER, J. SLAKHORST and T. VERBRAAK,
Zeitschrift für Metallkunde, 68, 1977, H.1, 31-37.

ANNEXES

ANNEXE 1

METHODE DE BISHOP ET HILL

1 - PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE

Le tableau A donne les états de contraintes possibles (dans le repère d'axe <100> du cristal), ainsi que les systèmes de glissement associés pour des glissements du type {111} <110> dans un cristal cubique à faces centrées. Il faut aussi considérer les 28 autres cas obtenus en changeant tous les signes.

Pour les contraintes on utilise la convention suivante :

$A = (\sigma^*_{22} - \sigma^*_{33})$
$B = (\sigma^*_{33} - \sigma^*_{11})$
$C = (\sigma^*_{11} - \sigma^*_{22})$
$F = \sigma^*_{23}$
$G = \sigma^*_{13}$
$H = \sigma^*_{12}$

Ces contraintes sont données en unités $\sqrt{6}\ \tau_c$, τ_c étant la contrainte critique de cisaillement. Par exemple l'état + 9 correspond à :

$A = -\sqrt{6}\ \tau_c$, $B = \frac{\sqrt{6}}{2}\ \tau_c$, $C = \frac{\sqrt{6}}{2}\ \tau_c$, $F = \frac{\sqrt{6}}{2}\ \tau_c$, $G = 0$, $H = 0$ les plans de glissement associés étant : $-\ a_1$, $+\ a_2$, $-\ b_1$, $+\ b_3$, $-\ c_1$, $+\ c_2$, $-\ d_1$, $+\ d_3$.

Number of stress state	A	B	C	F	G	H	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3	Number of active slip systems
1	1	−1	0	0	0	0	+	−		+	−		+	−		+	−		8
2	0	1	−1	0	0	0		+	−		+	−		+	−		+	−	8
3	−1	0	1	0	0	0	−		+	−		+	−		+	−		+	8
4	0	0	0	1	0	0		+	−		−	+		+	−		−	+	8
5	0	0	0	0	1	0	−		+	+		−	+		−	−		+	8
6	0	0	0	0	0	1	+	−		+	−		−	+		−	+		8
7	½	−1	½	0	½	0		−	+	+	−		+	−			−	+	8
8	½	−1	½	0	−½	0	+	−			−	+		−	+	+	−		8
9	−1	½	½	½	0	0	−	+		−		+	−	+		−		+	8
10	−1	½	½	−½	0	0	−		+	−	+		−		+	−	+		8
11	½	½	−1	0	0	½	+		−	+		−		+	−		+	−	8
12	½	½	−1	0	0	−½		+	−		+	−	+		−	+		−	8
13	½	0	−½	½	0	½	+		−	+	−			+	−				6
14	½	0	−½	−½	0	½	+	−		+		−					+	−	6
15	½	0	−½	½	0	−½		+	−				+		−	+	−		6
16	½	0	−½	−½	0	−½					+	−	+	−		+		−	6
17	0	−½	½	0	½	½		−	+	+	−					−		+	6
18	0	−½	½	0	−½	½	+	−			−	+	−		+				6
19	0	−½	½	0	½	−½	−		+				+	−			−	+	6
20	0	−½	½	0	−½	−½				−		+		−	+	+	−		6
21	−½	½	0	½	½	0	−	+						+	−	−		+	6
22	−½	½	0	−½	½	0	−		+		+	−				−	+		6
23	−½	½	0	½	−½	0		+	−	−		+	−	+					6
24	−½	½	0	−½	−½	0				−	+		−		+		+	−	6
25	0	0	0	½	½	−½	−	+					+		−		−	+	6
26	0	0	0	½	−½	½	+		−		−	+	−	+					6
27	0	0	0	−½	½	½		−	+	+		−				−	+		6
28	0	0	0	½	½	½				+	−			+	−	−		+	6

Tableau A : Etat de contrainte et systèmes de glissement.

2 - Calcul

On calcule tout d'abord l'"énergie externe" $W = \Sigma \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = - B \delta \varepsilon_{11} + A \delta \varepsilon_{22} + 2 F \delta \varepsilon_{23} + 2 B \delta \varepsilon_{13} + 2 H \delta \varepsilon_{12}$. Cette expression est calculée pour tous les états de contraintes possibles et on ne conserve que celui ou ceux qui ont l'énergie maximale. Les plans de glissement sélectionnés sont ceux qui sont communs aux états de contraintes calculés précédemment. S'il n'y a qu'un seul état de contrainte sélectionné alors il y aura 6 ou 8 systèmes de glissement, par contre dans le cas où il y a plusieurs états de contraintes possibles, le nombre de systèmes de glissement serait au maximum de 5. Le calcul des rotations se fait alors par la méthode indiquée au paragraphe I.3.

ANNEXE 2

GENERALISATION POUR DES CONDITIONS MIXTES DES METHODES DE BISHOP ET HILL ET DE TAYLOR POUR LA DETERMINATION DES SYSTEMES DE GLISSEMENT A L'ETAT CRITIQUE ; DEMONSTRATION DE LEUR EQUIVALENCE

Notations : $(\delta\gamma^k,\ \sigma_{ij},\ \delta\varepsilon_{ij})$ *paramètres d'une solution quelconque*

$(\delta\Gamma^k,\ \sigma^r_{ij},\ \delta\varepsilon^r_{ij})$ *paramètres de la solution réelle*

1 - GÉNÉRALISATION DE LA METHODE DE BISHOP ET HILL

Il s'agit de démontrer que le travail des forces extérieures non-imposées est maximum.

Considérons une solution quelconque qui se trouve à l'intérieur ou sur la frontière du polyèdre critique des contraintes non-imposées σ^*_{ij}. Pour cette solution, la cission réduite sur un système k, τ^k est telle que :

$$-\tau^k_c \leq \tau^k \leq \tau^k_c$$

Multiplions chaque terme par les amplitudes de glissement de la solution réelle $\delta\Gamma^k$, puis faisons la sommation sur tous les systèmes, k = 1 à 12.

$$\sum_k \delta\Gamma^k \tau^k \leq \sum_k \delta\Gamma^k (\pm\tau^k_c) \qquad \text{avec} \quad \delta\Gamma^k (\pm\tau^k_c) \geq 0$$

Remplaçons $\tau^k = \sum_{ij} M^k_{ij}\,\sigma_{ij}$ et $\tau^k_c = \sum_{ij} M^k_{ij}\,\sigma^r_{ij}$

$$\sum_k \delta\Gamma^k \sum_{ij} M^k_{ij}\,\sigma_{ij} \leq \sum_k \delta\Gamma^k \sum_{ij} M^k_{ij}\,\sigma^r_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{ij} \sigma_{ij} \sum_k \delta\Gamma^k M^k_{ij} \leq \sum_{ij} \sigma^r_{ij} \sum_k M^k_{ij}\,\delta\Gamma^k$$

Les amplitudes réelles définissent la déformation réelle $\sum_{ij} M^k_{ij}\,\delta\Gamma^k = \delta\varepsilon^r_{ij}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{ij} \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon^r_{ij} \leq \sum_{ij} \sigma^r_{ij}\,\delta\varepsilon^r_{ij}$$

Décomposons en termes imposés et non-imposés

$$\Rightarrow \quad \sum_{ij} \overline{\sigma}_{ij}\,\delta e^{*r}_{ij} + \sum_{ij} \sigma^*_{ij}\,\delta\overline{e}^{\,r}_{ij} \leq \sum_{ij} \overline{\sigma}^r_{ij}\,\delta e^{*r}_{ij} + \sum_{ij} \sigma^{*r}_{ij}\,\delta\overline{e}^{\,r}_{ij}$$

Les premiers termes de chaque côté de l'inégalité sont égaux ($\overline{\sigma}^r_{ij} = \overline{\sigma}_{ij}$) et $\delta\overline{e}^{\,r}_{ij} = \delta\overline{e}_{ij}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{ij} \sigma^*_{ij}\,\delta\overline{e}_{ij} \leq \sum_{ij} \sigma^{*r}_{ij}\,\delta\overline{e}^{\,r}_{ij}}$$

La solution réelle rend donc maximal le travail des forces extérieures non-imposées σ^*_{ij}.

2 - GENERALISATION DE LA METHODE DE TAYLOR

Il s'agit de démontrer que, sous conditions mixtes, le travail interne des amplitudes de glissement est minimal.

La solution réelle pour les amplitudes de glissement ($\delta\Gamma^k$) possède un état de contrainte réel σ^r_{ij} tel que, pour chaque système de glissement k :

$$-\tau^k_c \leq \tau^k = \sum_{ij} \sigma^r_{ij} M^k_{ij} \leq \tau^k_c \qquad (1)$$

Multiplions chaque terme par les amplitudes de glissement $\delta\gamma^k$ d'une solution quelconque qui vérifie les conditions sur les déformations imposées $\delta\bar{e}_{ij}$, soit :

$$\sum_k M^k_{ij}\, \delta\gamma^k = \delta\bar{e}_{ij} \qquad (2)$$

faisons la sommation sur tous les systèmes k = 1, ..., 12 :

$$\sum_k \delta\gamma^k \sigma^r_{ij} M^k_{ij} \leq \sum_k \delta\gamma^k (\pm \tau^k_c) \qquad \text{avec chaque } \delta\gamma^k (\pm\tau^k_c) > 0$$

La sommation étant étendue à tous les couples (i,j) on peut écrire $\sum_k \delta\gamma^k M^k_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}$, d'où :

$$\sigma^r_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij} \leq \sum_k \delta\gamma^k (\pm \tau^k_c)$$

Décomposons en termes imposés et non imposés

$$\Rightarrow \qquad \sigma^{*r}_{ij}\, \delta\bar{e}_{ij} + \bar{\sigma}^r_{ij}\, \delta e^*_{ij} \leq \sum_k \delta\gamma^k (\pm \tau^k_c)$$

on a $\bar{\sigma}^r_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}$ et $\delta\bar{e}^r_{ij} = \delta\bar{e}_{ij}$

$$\Rightarrow \qquad \sigma^{*r}_{ij}\, \delta\bar{e}^r_{ij} \leq \sum_k \delta\gamma^k (\pm \tau^k_c) - \bar{\sigma}_{ij}\, \delta e^*_{ij} \qquad (3)$$

Remplaçons $\delta\bar{e}^r_{ij} = \sum_k M^k_{ij}\ \delta\Gamma^k$ et $\delta e^*_{ij} = \sum_k M^k_{ij}\ \delta\gamma^k$

$$\Rightarrow \qquad \sum_k \sigma^{*r}_{ij}\ M^k_{ij}\ \delta\Gamma^k \le \sum_k \delta\gamma^k\ (\pm\ \tau^k_c - \bar{\sigma}_{ij}\ M^k_{ij})$$

Remplaçons σ^{*r}_{ij} par $\sigma^r_{ij} - \bar{\sigma}^r_{ij} = \sigma^r_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}$

$$\Rightarrow \qquad \sum_k \delta\Gamma^k\ (\sigma^r_{ij}\ M^k_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}\ M^k_{ij}) \le \sum_k \delta\gamma^k\ (\pm\ \tau^k_c - \bar{\sigma}_{ij}\ M^k_{ij})$$

on a $\bar{\sigma}_{ij}\ M^k_{ij} = \bar{\tau}^k$ cission résolue sur les systèmes k par les contraintes imposées $\bar{\sigma}_{ij}$ et $\sigma^r_{ij}\ M^k_{ij} = \pm\tau^k_c$

d'où

$$\boxed{\sum_k \delta\Gamma^k\ (\pm\ \tau^k_c - \bar{\tau}^k) \le \sum_k \delta\gamma^k\ (\pm\ \tau^k_c - \bar{\tau}^k)}$$

La solution réelle minimise donc le travail interne.

Avec l'expression (3) on peut écrire :

$$\sigma^{*r}_{ij}\ \delta\bar{e}^r_{ij} \le \sum_k \delta\gamma^k\ \sigma_{ij}\ M^k_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}\ \delta e^*_{ij}$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma^{*r}_{ij}\ \delta\bar{e}^r_{ij} \le \sum_k \delta\gamma^k\ \sigma_{ij}\ M^k_{ij} - \sum_k \bar{\sigma}_{ij}\ M^k_{ij}\ \delta\gamma^k$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma^{*r}_{ij}\ \delta\bar{e}^r_{ij} \le \sum_k \delta\gamma^k\ M^k_{ij}\ (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma^{*r}_{ij}\ \delta\bar{e}^r_{ij} \le \sum_k \delta\gamma^k\ M^k_{ij}\ \sigma^*_{ij}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\sigma^{*r}_{ij}\ \delta\bar{e}^r_{ij} \le \sigma^*_{ij}\ \delta\bar{e}_{ij}}$$

La comparaison avec la solution (1) démontre l'équivalence des deux méthodes.

ANNEXE 3

CALCUL DE DT SOUS FORME MATRICIELLE

La forme de dT simplifiée *(voir Chapitre II)* est :

$$dT = \sum_{l=1}^{n} \left(\Sigma_{ij} - \sigma_{ij}\, dM_{ij}^{l}\, \delta\gamma^{l} \right)$$

avec $$dM_{ij}^{l} = \sum_{k=1}^{n} m_{ij}^{kl}\, \delta\gamma^{k}$$

d'où $$dT = \sum_{l=1}^{n} \left(\Sigma_{ij} - \sigma_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} m_{ij}^{kl}\, \delta\gamma^{k} \right) \delta\gamma^{l} \right)$$

$$\Rightarrow \quad dT = \sum_{l=1}^{n} \left(\Sigma_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} - \sigma_{ij}\, m_{ij}^{kl}\, \delta\gamma^{k}\, \delta\gamma^{l} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \quad dT = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\left(\Sigma_{ij} - \sigma_{ij}\, m_{ij}^{kl} \right)}_{A^{kl}} \delta\gamma^{l}\, \delta\gamma^{k}$$

L'élément courant de la matrice de définition de dT est :

$$A^{kl} = \Sigma_{ij} - \sigma_{ij}\, m_{ij}^{kl}$$

CALCUL DES m_{ij}^{kl}

les M_{ij}^{l} sont définis par :

$$2M_{ij}^{l} = b_i^l\, n_j^l + b_j^l\, n_i^l$$

$$2dM_{ij}^{l} = (db_i^l\, n_j^l + db_j^l\, n_i^l) + (dn_j^l\, b_i^l + dn_i^l\, b_j^l)$$

les $\overrightarrow{db}$ et $\overrightarrow{dn}$ sont définis par :

$$\overrightarrow{db}^{l} = \vec{r} \wedge \vec{b}^{l}$$

$$\overrightarrow{dn}^{l} = \vec{r} \wedge \vec{n}^{l}$$

avec

$$r_1 = -\sum_{k=1}^{n} \delta\gamma^k\, b_3^k\, n_2^k = -\delta g_{32}$$

$$r_2 = \sum_{k=1}^{n} \delta\gamma^k\, b_3^k\, n_1^k = \delta g_{31}$$

$$r_3 = \sum_{k=1}^{n} \delta\gamma^k\, b_1^k\, n_2^k = \delta g_{12}$$

d'où

$$db_1^l = b_3^l \sum_{k=1}^{n} b_3^k\, n_1^k\, \delta\gamma^k - b_2^l \sum_{k=1}^{n} b_1^k\, n_2^k\, \delta\gamma^k$$

$$db_2^l = b_1^l \sum_{k=1}^{n} b_1^k\, n_2^k\, \delta\gamma^k + b_3^l \sum_{k=1}^{n} b_3^k\, n_2^k\, \delta\gamma^k$$

$$db_3^l = -b_2^l \sum_{k=1}^{n} b_3^k\, n_2^k\, \delta\gamma^k - b_1^l \sum_{k=1}^{n} b_3^k\, n_1^k\, \delta\gamma^k$$

$$\left\{\begin{array}{l} dn_1^1 = n_3^1 \sum_{k=1}^{n} b_3^k\, n_1^k\, \delta\gamma^k - n_2^1 \sum_{k=1}^{n} b_1^k\, n_2^k\, \delta\gamma^k \\ \text{et} \quad dn_2^1 = n_1^1 \sum_{k=1}^{n} b_1^k\, n_2^k\, \delta\gamma^k + n_3^1 \sum_{k=1}^{n} b_3^k\, n_2^k\, \delta\gamma^k \\ dn_3^1 = -n_2^1 \sum_{k=1}^{n} b_3^k\, n_2^k\, \delta\gamma^k - n_1^1 \sum_{k=1}^{n} b_3^k\, n_1^k\, \delta\gamma^k \end{array}\right.$$

d'où $$dM_{11}^1 = db_1^1\, n_1^1 + b_1^1\, dn_1^1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(2b_3^k\, n_1^k\, M_{13}^1 - 2b_1^k\, n_2^k\, M_{12}^1)\, \delta\gamma^k}_{m_{11}^{k1}}$$

$$dM_{22}^1 = db_2^1\, n_2^1 + b_2^1\, dn_2^1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(2b_1^k\, n_2^k\, M_{12}^1 + 2b_3^k\, n_2^k\, M_{23}^1)\, \delta\gamma^k}_{m_{22}^{k1}}$$

$$dM_{33}^1 = db_3^1\, n_3^1 + b_3^1\, dn_3^1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-2b_3^k\, n_2^k\, M_{23}^1 - 2b_3^k\, n_1^k\, M_{13}^1)\, \delta\gamma^k}_{m_{33}^{k1}}$$

$$2dM_{12}^{l} = db_1^{l}\, n_2^{l} + db_2^{l}\, n_1^{l} + dn_1^{l}\, b_2^{l} + dn_2^{l}\, b_1^{l}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(2n_1^k\, b_3^k\, M_{23}^{l} + 2n_2^k\, b_3^k\, M_{13}^{l} + 2n_2^k\, b_1^k\, (n_1^{l}\, b_1^{l} - n_2^{l}\, b_2^{l})\right)}_{2m_{12}^{kl}} \delta\gamma^k$$

$$2dM_{13}^{l} = db_1^{l}\, n_3^{l} + db_3^{l}\, n_1^{l} + dn_1^{l}\, b_3^{l} + dn_3^{l}\, b_1^{l}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(-2b_3^k\, n_2^k\, M_{12}^{l} - 2b_1^k\, n_2^k\, M_{23}^{l} + 2n_1^k\, b_3^k\, (n_3^{l}\, b_3^{l} - n_1^{l}\, b_1^{l})\right)}_{2m_{13}^{kl}} \delta\gamma^k$$

$$2dM_{23}^{l} = db_2^{l}\, n_3^{l} + db_3^{l}\, n_2^{l} + dn_2^{l}\, b_3^{l} + dn_3^{l}\, b_2^{l}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(2b_1^k\, n_2^k\, M_{13}^{l} - 2b_3^k\, n_1^k\, M_{12}^{l} + 2b_3^k\, n_2^k\, (n_3^{l}\, b_3^{l} - n_2^{l}\, b_2^{l})\right)}_{2m_{23}^{kl}} \delta\gamma^k$$

d'où

$$m_{11}^{kl} = 2\,(n_1^k\, b_3^k\, M_{13}^l - n_2^k\, b_1^k\, M_{12}^l)$$

$$m_{22}^{kl} = 2\,(n_2^k\, b_1^k\, M_{12}^l + n_2^k\, b_3^k\, M_{23}^l)$$

$$m_{33}^{kl} = 2\,(-n_2^k\, b_3^k\, M_{23}^l - n_1^k\, b_3^k\, M_{13}^l)$$

$$m_{12}^{kl} = n_1^k\, b_3^k\, M_{23}^l + n_2^k\, b_3^k\, M_{13}^l + n_2^k\, b_1^k\, (n_1^l\, b_1^l - n_2^l\, b_2^l)$$

$$m_{13}^{kl} = -n_2^k\, b_3^k\, M_{12}^l - n_2^k\, b_1^k\, M_{23}^l + n_1^k\, b_3^k\, (n_3^l\, b_3^l - n_1^l\, b_1^l)$$

$$m_{23}^{kl} = n_2^k\, b_1^k\, M_{13}^l - n_1^k\, b_3^k\, M_{12}^l + n_2^k\, b_3^k\, (n_3^l\, b_3^l - n_2^l\, b_2^l)$$

et

$$A^{kl} = \sum_{ij} - \sigma_{ij}\, m_{ij}^{kl}$$

AUTORISATION de SOUTENANCE

VU les dispositions de l'article 5 de l'arrêté du 16 avril 1974,

VU les rapports de présentation de Messieurs

. B. BAUDELET, Professeur
. J.H DRIVER, Chargé de recherche
. A. ZAOUI, Professeur

Monsieur SKALLI HOUSSEYNI Abdelali

est autorisé à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du grade de

DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.

Fait à Grenoble, le 15 juin 1984

Le Président de l'U.S.M.G

Le Président de l'I.N.P.- G

D. BLOCH
Président
de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble

P.O. le Vice-Président,

THESE de DOCTORAT d'ETAT

SKALLI HOUSSEYNI Abdelali

I.N.P.G.

RESUME : Les modèles théoriques de la plasticité de cristaux basés sur les critères énergétiques de déformation plastique du premier et de second ordre ont été appliqués au cas d'une grande déformation partiellement ou complètement imposée à des cristaux c.f.c. Les prévisions théoriques pour les systèmes de glissement, les rotations et les déformations non imposées sont comparées aux résultats expérimentaux obtenus sur de nombreux monocristaux d'aluminium en compression plane. L'utilisation de tricristaux a permis pour la première fois d'imposer complètement une déformation homogène importante à un cristal. L'accord entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux est très satisfaisant. Cet accord a permis d'étendre l'application de ces théories au problème de la déformation des grains dans une tôle d'aluminium à gros grains laminée.

MOTS-CLES : grandes déformations plastiques, compression plane, monocristaux, état de contrainte, système de glissement, rotation cristalline, cisaillement.